(قسط ۴)

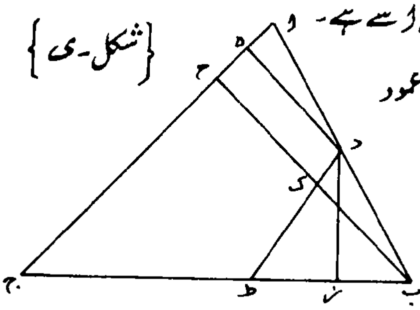
رسالہ فی خواص المثلث من جہۃ العمود

از امام ابن الہیثم ○ ترجمہ وتحشیہ سید فضل احمد شمسی، فیلو ادارہ تحقیقات اسلامی، اسلام آباد

۸

ہم پھر ایک مثلث لیتے ہیں۔ ا ب ج ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔ اس کے کسی ایک ضلع پر ایک نقطہ د فرض کرتے ہیں۔ [فرض کر لیجیے کہ ہم نے ضلع ا ب پر نقطہ د کا انتخاب کیا ہے] اور اس نقطے سے [علی الترتیب اضلاع ا ج اور ب ج پر] عمود د ہ اور د ز نکالتے ہیں اور [نقطہ ب سے ضلع ا ج پر] عمود ب ح بھی کھینچتے ہیں۔ نیز خط ا ج کے متوازی [ایک خط] د ک ط نکالتے ہیں [اس طرح کہ نقطہ ط خطوط د ک ط اور ب ج کا نقطہ اتصال ہے اور نقطہ ک خطوط د ک ط اور ب ح کا نقطہ انقطاع ہے]

[اب خط ب ح (بڑھایا ہوا، اگر ضروری ہو) پر ایک ایسا نقطہ ن فرض کرتے ہیں کہ]



{شکل۔ی}

ب ک کی نسبت ک ن سے ویسی ہی ہو جیسی کہ ب ج کو ج ا سے ہے۔

ہمارا دعویٰ ہے کہ عمودین د ہ اور د ز کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ح کے۔

ثبوت: [چونکہ مثلثات ا ب ج اور د ب ط متشابہ ہیں، لہٰذا] ب ط کی نسبت ط د سے وہی ہے جو کہ ب ج کو ج ا سے ہے۔ اور [جیسا کہ فرض کر چکے ہیں] ب ج کو ج ا سے وہی نسبت ہے جو [ب ک کو ک ن سے ہے۔

پس، جو نسبت ب ط کو ط د سے ہے وہی ب ک کو ک ن سے ہے۔

اب [مثلث د ب ط میں د ز۔ ب ط پر عمود ہے اور ب ک۔ د ط پر عمود ہے لہٰذا ایک پہلے مسئلہ اثباتی کے مطابق] ب ط کی نسبت ط د سے وہی ہے جو ب ک کو د ز سے ہے۔

لہذا، عمود د ز برابر ہے عمود {ک ن} کے۔

اور، [چونکہ د ہ اور ک ح متوازی خطوط کے درمیان ہیں، لہذا]

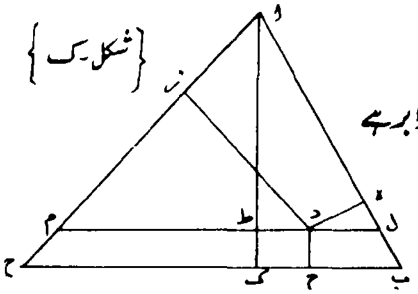
{د ہ} برابر ہے ک ح کے

پس، عمودین د ز اور د ہ کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ح کے۔

(و ذلک ما اردنا بیانہ)

٩

مثلث مختلف الاضلاع کو پھر لیتے ہیں۔ فرض کیا کہ ا ب ج ایک ایسی مثلث ہے۔ اس میں ہم ایک نقطہ د فرض کر لیتے ہیں اور اس سے [علی الترتیب اضلاع ا ب۔ ا ج اور ب ج پر] عمود د ہ - د ز اور د ح نکالتے ہیں۔ خط ب ج کے متوازی ایک خط ل د م نقطہ د سے گزارتے ہیں [اس طرح کہ نقطہ ل خط ا ب پر اور نقطہ م خط ا ج پر ہو]۔ اور ایک عمود ا ط ک (نقطہ ا سے ب ج پر اس طرح) نکالتے ہیں [کہ نقطہ ط خطوط ا ط ک اور ل د م کا نقطہ اتصال ہو]۔



{شکل-ک}

اب (خط ط ا (بڑھایا ہوا، اگر ضروری ہو) پر ایک ایسا نقطہ ن فرض کرتے ہیں کہ) ا ط کی نسبت ط ن سے وہی ہو جو ب ج کو ج ا سے ہے۔

ہمارا دعوٰی ہے کہ عمود د ہ - د ز اور د ح کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ک کے۔ ٣٧

ثبوت: ل م کی نسبت م ا سے وہی ہے جو ب ج کو ج ا سے ہے (کیونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ل م متشابہ ہیں)، اور

ب ج کی نسبت ج ا سے وہی ہے جو ا ط کو ط ن سے ہے (جیسا کہ فرض کر چکے ہیں)

پس، ا ط کی نسبت ط ن سے وہی ہے جو ل م کو م ا سے ہے۔

اور، عمودین د ہ اور د ز کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ط کے ٣٨ (جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے ٣٩)۔ اور

عمود د ح برابر ہے عمود ط ک کے [کیونکہ دونوں متوازی خطوط کے درمیان عمود ہیں]

پس، عمود د ہ - د ز اور د ح کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ک کے ٣٨

اس ثبوت کا اطلاق تمام قائمۃ الزاویہ، حادۃ الزاویہ اور منفرجۃ الزاویہ مختلف الاضلاع اور متساوی الاضلاع

مثلثوں پر ہوتا ہے۔ [۴۰] (وذلک ما اردنا ان نبین)

(تمت المقالة فی اعمدة المثلثات)

و للہ الحمد والصلوات علی نبیہ محمد وآلہ۔

میں اس [مقالے] کی کتابت سے موصل عروسہ میں صفر ۶۳۲ (ھ) میں فارغ ہوا۔

[نقل نویس]

حواشی وحوالہ جات

۳۷- یہ دعویٰ صحیح نہیں ہے۔ فی الحال یہ کہنا ناممکن ہے کہ واقعی ابن الہیثم نے وہ غلطی کی جس کا دعویٰ نوٹ ۳۹ میں ہے یا یہ کہ یہ مسئلہ سرے ہی سے کچھ اور تھا۔ صرف یہ کہہ سکتا ہوں کہ کوشش بسیار کے باوجود اس مسئلہ کو کوئی اور شکل نہیں دے پایا، نیز یہ کہ اگر کسی غلطی کے باعث ابن الہیثم کا مسئلہ کچھ کا کچھ ہو گیا ہے تو وہ ایسی غلطی ہے جو دعویٰ، ثبوت اور شکل سب میں موجود ہے!

یہ امر کہ دعویٰ صحیح نہیں ہے، اس کا ثبوت یہ ہے۔

(ا) فرض کر لیں کہ مثلث حاد الزاویہ (ACUTE - ANGLED) ہے؛
نیز (دی ہوئی شکل میں) مان لیں کہ زاویہ ب ا ج = ۷۵°، زاویہ ا ب ج ۴۵° اور زاویہ ا ج ب ۶۰° ہیں۔

ثابت یہ کرنا ہے کہ د ہ - د ز اور د ح کا مجموعہ ت ک کے برابر نہیں ہے۔ گویا یہ ثابت کرنا ہے کہ د ہ اور د ز کا مجموعہ ت ط کے برابر نہیں ہے۔

ثبوت: ا ط : ط ت :: ل م : م ا (جیسا کہ مسئلہ میں فرض کیا گیا ہے)

(ا ب، ل م : م ا :: جیب ا : جیب ل

یعنی ل م / م ا = جیب ۷۵° / جیب ۴۵°

یعنی ل م / م ا = ((۱ + √۳) / (۲ √۲)) / (۱ / √۲)، یعنی ل م / م ا = (۱ + √۳) / ۲)

لہذا، اط : طن :: (۳√ + ۱) : ۲

یعنی، طن = $\frac{۲}{۱+\sqrt{۳}}$ اط

(اب، دہ = دل جیب ق

یعنی دہ = دل جیب °۴۵

یعنی دہ = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ دل۔

اسی طرح دز = دم $\frac{۱}{۲}$، اور اط = ل ط

پس، دہ + دز = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ دل + $\frac{۱}{۲}$ دم)

اب اگر طن = دہ + دز، ہو تو

$\frac{۲}{۱\sqrt{۳}}$ لم = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ دل + $\frac{۱}{۲}$ دم ہوگا۔ یعنی

۳√۲ (۲√ دل + دل + دط) + (۱ - ۳√۲) طم = -۳ دط ہوگا۔

جو ناممکن ہے۔ کیونکہ (۱ - ۳√۲) مثبت ہے اور اس طرح دائیں طرف کی کمیت مثبت ہے جبکہ بائیں جانب منفی کمیت ہے۔

پس ثابت ہوا کہ طن برابر نہیں ہے دہ اور دز کے مجموعہ کے۔

اس طرح یہ بھی ثابت ہوگیا کہ یہ مسئلہ ہر حادالزاویہ مثلث کے لئے صحیح نہیں ہے۔

(ii) فرض کریں کہ مثلث قائم الزاویہ ہے:

نیز (دی ہوئی شکل میں) مان لیں کہ زاویہ ب اج قائمہ ہے، زاویہ اب ج °۳۰ ہے اور زاویہ اج ب °۶۰ ہے۔

اب، لم : م ا :: ۲ : ۱

∴ طن = $\frac{۱}{۲}$ اط ، اط = $\frac{۱}{۲}$ ل ط، اور دہ + دز = $\frac{\text{دل} + \sqrt{۳}\,\text{دم}}{۲}$

چنانچہ اگر طن = دہ + دز، تو

$\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ل ط = $\frac{\text{دل} + \sqrt{۳}\,\text{دم}}{۲}$ ہوگا، یعنی

دل = -۳√ دط ہوگا، جو کہ ناممکن ہے۔

پس یہ مسئلہ ہر قائم الزاویہ مثلث کے لئے بھی صحیح نہیں ہے۔

(iii) فرض کریں کہ مثلث منفرجہ الزاویہ ہے :

نیز (دی ہوئی شکل میں) مان لیں کہ زاویۂ ب ا ج ۱۰۵° ، زاویہ ا ب ج ۴۵° ، اور زاویہ ا ج ب ۳۰° ہے۔

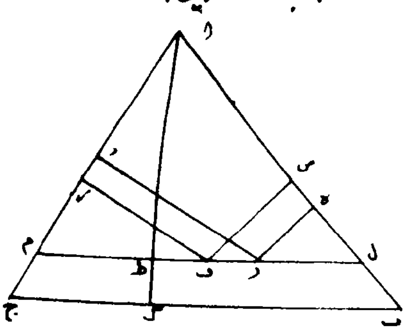
اب، ل م : م ا :: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ، یعنی وہی تناسب ہے جو اوپر فرض کی ہوئی مثلث حادۃ الزاویہ میں تھا۔ لہذا وہی نتیجہ یہاں بھی برآمد ہوگا۔

پس یہ بات ثابت ہوئی کہ ہر منفرجہ الزاویہ مثلث کے لئے یہ مسئلہ صحیح نہیں ہے ۔

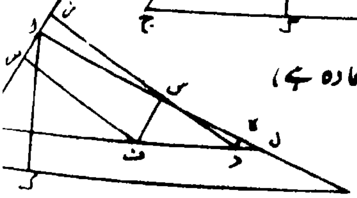
اب ایک دوسرے طور پر یہ بات ثابت کی جا سکتی ہے کہ یہ مسئلہ کسی بھی مختلف الاضلاع مثلث کے لئے صحیح نہیں ہے۔

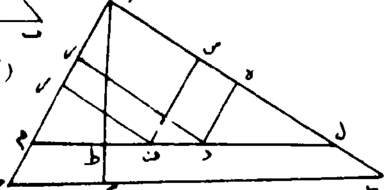
موجودہ مسئلہ میں نقطہ د مثلث میں کوئی سا بھی ایک نقطہ ہے۔ یعنی دعویٰ یہ ہے کہ مثلث میں کسی بھی نقطے کو نقطہ د تسلیم کر سکتے ہیں۔ لہذا اگر خط ل م پر ایک دوسرے نقطے کو لے لیں (فرض کریں کہ یہ نقطہ ف ہے) اور اس نقطہ سے ف خ ۔ ف ر ۔ اور ف س عمود اضلاع ب ج ۔ ا ج اور ا ب پر علی الترتیب گرائیں تو ابن الہیثم کے دعویٰ کے مطابق ان تینوں عمودوں ف خ ۔ ف ر اور ف س کے مجموعہ کو ن ک کے برابر ہونا چاہیئے۔ اس طرح (ف خ + ف ر + ف س) کو (د ح + د ز + د ہ) کے برابر ہونا چاہیئے۔ گویا (چونکہ ف خ برابر ہے د ح کے)۔ (ف ر + ف س) کو (د ز + د ہ) کے برابر ہونا چاہیئے۔

(۱) فرض کریں زاویئے ا ب ج اور ا ج ب حادہ ہیں:



(زاویہ ب ا ج - حادہ ہے)





اب فرض کرتے ہیں کہ (ف د + ف س) = (د ز + د ہ)۔

تو (ف م × جیب زاویہ ج) + (ف ل × جیب زاویہ ب) = (د م × جیب ج̂) + (د ل × جیب ث̂)

$[(FM \sin \hat{j} + FL.\sin \hat{b}) = (DM.\sin \hat{j} + DL.\sin \hat{b})]$

یعنی ف م جیب ج̂ + د ل جیب ث̂ + د ف جیب ث̂ = د ف جیب ج̂ + ف م جیب ج̂ +
د ل. جیب ث̂۔

یعنی د ف جیب ث̂ = د ف جیب ج̂ ۔

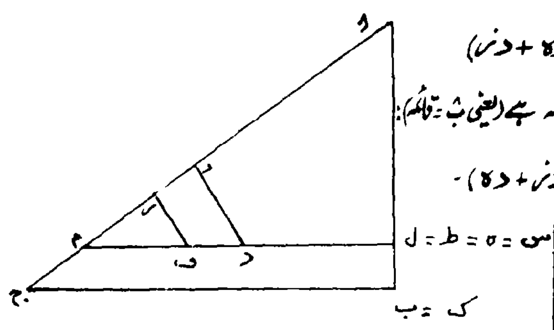
یعنی جیب ث̂ = جیب ج

یعنی (چونکہ دونوں ث̂ اور ج̂ حادہ ہیں) ث̂ = ج̂

لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ ث̂ ≠ ج̂، یعنی یہ کہ مثلث کے کوئی دو زاویے برابر نہیں۔

لہذا، ہمارا مفروضہ (ف ر + ف س) = (د ہ + د ز) صحیح نہیں ہو سکتا۔

∴ (ف ر + ف س) ≠ (د ہ + د ز)



(ii) فرض کریں کہ زاویہ ا ب ج قائمہ ہے (یعنی ث̂ = قائمہ)؛

اب مان لیں کہ (ف ر + ف س) = (د ز + د ہ)۔

تو (ف م جیب ج̂ + ف ل) =

(د م جیب ج̂ + د ل)

یعنی (ف م جیب ج̂ + د ف + د ل) = (د ف جیب ج̂ + ف م جیب ج̂ + د ل)۔

یعنی د ف = د ف جیب ج̂

یعنی۔ جیب ج̂ = ۱

یعنی۔ ج̂ = °۹۰

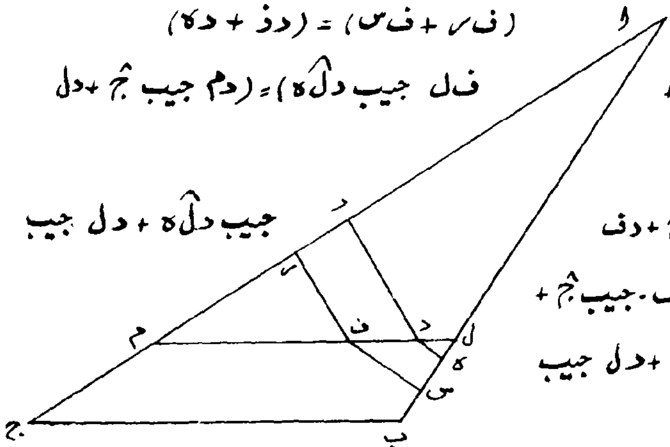
لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ ایک (اقلیدسی) مثلث میں دو زاویے قائمہ نہیں ہو سکتے۔

لہذا، ہمارا مفروضہ (ف ر + ف س) = (د ز + د ہ) صحیح نہیں ہو سکتا۔

∴ (ف ر + ف س) ≠ (د ز + د ہ)

(iii) فرض کریں کہ زاویہ ا ب ج منفرجہ ہے؛

[ایسی صورت میں د ہ اور ف س خط ا ل کے بڑھائے ہوئے حصہ پر عمود ہوں گے (نقاط ل اور ب کے درمیان یا اس سے بھی آگے بڑھائے ہوئے حصہ پر۔ اس طرح کہ نقاط ہ اور س نقاط ل اور ب کے درمیان پڑنے کے بجائے مثلث سے باہر واقع ہوں۔ نیز زاویہ د ل ہ برابر ہوگا زاویوں ب ا ج اور ب ج ا کے مجموعہ کے۔ (بعض حالتوں میں نقطہ ح یا خ یا دونوں مثلث سے باہر ہوں گے۔)]



اب مان لیں کہ (ف ر + ف س) = (د ذ + د ہ)

تو (ف م جیب ج̂ + ف ل جیب د ل̂ ہ) = (د م جیب ج̂ + د ل جیب د ل̂ ہ)

یعنی (ف م جیب ج̂ + د ف جیب د ل̂ ہ + د ل جیب د ل̂ ہ) = (د ف جیب ج̂ + ف م جیب ج̂ + د ل جیب د ل̂ ہ)۔

یعنی (د ف جیب د ل̂ ہ) = (د ف جیب ج̂)۔

یعنی۔ جیب د ل̂ ہ = جیب ج̂۔

یعنی۔ یا تو (د ل̂ ہ = ج̂) یا (د ل̂ ہ = ١٢٠° اور ج̂ = ٦٠°)

لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ نہ تو د ل̂ ہ برابر ہو سکتا ہے ج̂ کے (واضح رہے کہ د ل̂ ہ = ا̂ + ج̂)، اور نہ ہی دوسری صورت یعنی (د ل̂ ہ = ١٢٠° اور ج̂ = ٦٠°) ممکن ہے۔ (کیونکہ اقلیدسی مثلث میں کوئی دو زاویئے دو قایمہ یعنی ١٨٠° سے ہمیشہ کم ہوتے ہیں)۔

لہذا ہمارا مفروضہ کہ (ف ر + ف س) = (د ذ + د ہ) صحیح نہیں ہو سکتا۔

∴ (ف ر + ف س) ≠ (د ذ + د ہ)

یہ ظاہر ہے کہ زاویہ ا ب ج یا تو حادہ ہے یا قایمہ ہے یا منفرجہ۔

لہذا یہ بات ثابت ہوئی کہ زاویہ ا ب ج خواہ حادہ ہو، قایمہ ہو یا منفرجہ ہو

(ف س + ف س) کسی صورت بھی (د ن + د ہ) کے برابر نہیں ہو سکتا۔

لہٰذا یہ ثابت ہو گیا کہ (اگر بفرض محال) کسی خاص نقطہ د کے لئے کسی خاص مثلث مختلف الاضلاع کے لئے یہ مسئلہ صحیح ہو بھی تو یہ مسئلہ اُسی مثلث کے دوسرے نقاط کے لئے صحیح نہیں ہے۔ یعنی یہ کہ یہ مسئلہ کسی بھی مختلف الاضلاع مثلث کے لئے صحیح نہیں ہے۔

۳۸۔ یہ مساوات صحیح نہیں ہے۔ دیکھئے نوٹ ۳۷ و ۳۹۔

۳۹۔ اس سے قبل کے مسئلہ میں جو بات ثابت ہوئی تھی وہ صرف یہ تھی کہ اگر اُس ضلع کو "قاعدہ" فرض کر لیں جس پر نقطہ د کو چنا گیا ہے اور "قاعدے" کے کسی زاویہ (فرض کر لیں۔ ب) سے مخالف ضلع پر عمود گرائیں، اور جس ضلع پر عمود گرایا ہے اس کے متوازی نقطہ د سے خط کھینچیں اس طرح کہ (فرض کر لیں) نقطہ ک اس متوازی خط اور اُس عمود کا نقطۂ اتصال ہو۔ اور ن ک ایک ایسا خط متصور کر لیں جس کی نسبت خط ب ک سے وہی ہو جو کہ تیسرے ضلع (یعنی "قاعدہ" اور وہ ضلع جس پر ب سے عمود گرایا گیا ہے کو چھوڑ کر جو ضلع رہ جاتا ہے) کو دوسرے ضلع (یعنی وہ ضلع جس پر ب سے عمود گرایا گیا ہے) سے ہے۔ نیز دوسرے ضلع پر وہ نقطہ جہاں یہ عمود گرتا ہے، نقطہ ح فرض کر لیں۔ تو دعویٰ یہ ہو سکتا ہے کہ نقطہ د سے دوسرے اور تیسرے ضلعوں پر گرائے گئے عمودوں کا مجموعہ ن ح کے برابر ہے۔

اس مسئلہ میں یہ خیال رکھنا ضروری ہے کہ ف ح صرف "قاعدے" کے زاویہ (کے راس) سے متقابل ضلع پر گرنے والے عمود (بڑھایا ہوا، اگر ضروری ہو) کا حصہ ہے، قاعدے کے متقابل زاویئے (کے راس) سے قاعدے پر گرنے والے عمود کا حصہ نہیں ہے۔

کیونکہ نقطہ ک کی تعریف ہی یہ ہے کہ یہ نقطۂ انقطاع ہے قاعدے کے زاویہ کے راس سے متقابل ضلع پر گرنے والے عمود، اور "دوسرے" ضلع کے اس متوازی خط کا جو کہ نقطہ د سے تیسرے ضلع کو جاتا ہے۔

موجودہ مسئلہ میں ابن الہیثم نے اس امر کو ملحوظِ خاطر نہیں رکھا ہے۔ بلکہ انھوں نے یہ تصور کر لیا ہے کہ ن ح کی تعریف اُس سے زیادہ عمومی (GENERAL) ہے جتنی کہ میں نے اوپر دی ہے۔ انھوں نے اپنے آٹھویں مسئلہ کے متعلق یہ خیال کیا کہ خواہ کسی بھی ضلع پر متقابل زاویئے کے

راس سے عمود کیوں نہ گرائیں۔ ن ح کی تعریف حسبِ سابق ممکن ہوگی۔ لیکن جیسا کہ اوپر کہا جاچکا ہے یہ خیال غلط ہے۔

غالباً ابن الہیثم نے "قاعدہ" کے دونوں زاویوں کے لئے مسئلہ - ۸ کو صحیح پایا تو انہوں نے تینوں زاویوں (کے راس) سے گرنے والے عمودوں کے لئے اُس مسئلہ کو صحیح فرض کر لیا۔

۴۰ - یہ تو ثابت کیا جاچکا کہ مختلف الاضلاع مثلثوں کے لئے یہ دعویٰ صحیح نہیں ہے، لہذا ابن الہیثم کا یہ دعویٰ کہ ہر قسم کی مختلف الاضلاع و متساوی الاضلاع مثلثوں پر اس ثبوت کا اطلاق ہو سکتا ہے صحیح نہیں ہے۔ لیکن یہ عجیب بات ہے کہ اس دعویٰ کا دوسرا ٹکڑا (یعنی اس ثبوت کا اطلاق متساوی الاضلاع مثلثوں پر) صحیح ہے !

مثلث متساوی الاضلاع میں چونکہ تینوں ضلعے برابر ہوتے ہیں لہذا کسی ایک ضلع کی نسبت

۔ دوسرے ضلع سے اکائی (UNITY) کے برابر ہے اور اس طرح ا ط برابر ہوگا ن ط کے، نیز چونکہ ا ط برابر ہے (د ہ + د ز) کے، ن ط بھی اِس مجموعہ کے برابر ہوگا۔

[تاہم یہ خیال صحیح نہیں ہوگا کہ ابن الہیثم نے یہ مسئلہ متساوی الاضلاع مثلثوں کے لئے ہی پیش کیا تھا۔ یہ مسئلہ اُن کے آٹھویں مسئلہ کے فوراً بعد آیا ہے اور اس مسئلہ میں آٹھویں مسئلے سے مدد بھی لی گئی ہے۔ لہذا ظاہر ہے کہ اس کا تعلق بھی مختلف الاضلاع مثلثوں سے ہے۔]