(قسط ۲)

رسالہ فی خواص المثلث من جھۃ العمود

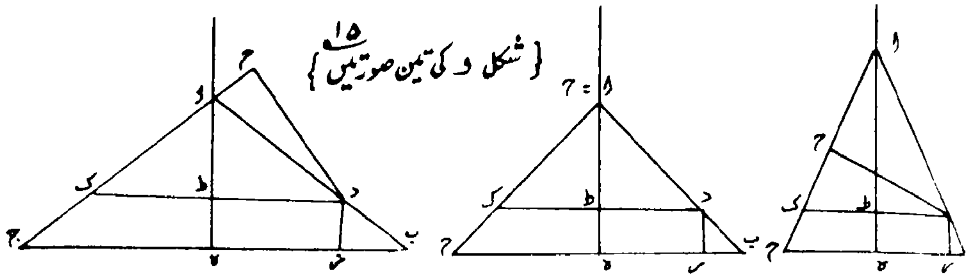
از امام ابن الہیثم ○ ترجمہ و تحشیہ سید فضل احمد شمسی، فیلو ادارۂ تحقیقات اسلامی، اسلام آباد

۴

[مثلث متساوی الساقین میں کسی ساق پر کے کسی نقطہ - د - سے دوسری ساق اور قاعدے پر ڈالے گئے عمودوں کا مجموعہ برابر ہے - ہ ل - کے؛ جبکہ ہ ل = ہ ط + ط ل، د ک - قاعدے کے متوازی اور ساقین کے درمیان، ایک خط ہے، ا ہ - مثلث کا عمود ہے نقطہ ط - خطوط د ک اور ا ہ کا نقطہ انقطاع ہے، اور ل ط ایک ایسا خط ہے جس کی نسبت ا ط سے ویسی ہی ہے جیسی کہ قاعدے کو کسی ایک ساق سے ہے[14]]

[مثال] پچھلی شکل دوبارہ فرض کریں [یعنی ا ب ج ایک مثلث متساوی الساقین ہے جس میں ا ب = ا ج اور زاویہ ب ا ج حادہ بھی ہو سکتا ہے۔ قائمہ بھی اور منفرجہ بھی]

ضلع ا ب پر کوئی ایک نقطہ د لے لیں اور اس سے عمود د ز [قاعدے پر] اور د ح [دوسری ساق پر] نکالیں۔ اور ایک عمود {ا ہ} [ا سے قاعدے پر] نکالیں۔ [نقطہ د سے قاعدے کے متوازی ایک خط کھینچیں جو ساق ا ج سے نقطہ ک پر ملے۔ فرض کریں کہ ط خطوط د ک اور ا ہ کا نقطۂ انقطاع ہے۔ تو چونکہ د ز برابر ہے ہ ط کے اور مثلثات ا ہ ب اور د ز ب ایک دوسرے کی متشابہ ہیں] ا ب کی نسبت ب د کے ساتھ وہی ہوگی جو کہ ا ہ کو ہ ط سے ہے۔ [اب ایک نقطہ ل خط ط ا (بڑھایا ہوا، اگر ضروری ہو) پر فرض کریں، اس طرح کہ] ا ط کی نسبت ط ل سے وہی ہو جو کہ ا ج کو ب ج سے ہے[14 الف]۔



{شکل د کی تین صورتیں}[15]

دعویٰ یہ ہے کہ عمودین د ز اور د ح کا مجموعہ برابر ہے عمود {ہ ل} کے ۔[16]

ثبوت: {...............} [17]

[مثلثات ا ب ج اور ا د ک متشابہ ہیں، لہٰذا]

جو نسبت {ا ج} کو ج ب سے ہے وہی نسبت ا ک کو ک د سے ہے۔

{......} [18]

پس، [کیونکہ ا ط : ط ل : : ا ج : ج ب فرض کر چکے ہیں] ا ک کی نسبت {ک د} سے وہی ہے جو ا ط کو ط ل سے ہے۔

[اب مثلث ا د ک میں ا ط خط د ک پر اور د ح خط ا ک پر عمود ہیں۔ لہٰذا]

ا ک کی نسبت ک د سے وہی ہے جو {ا ط} کو د ح سے ہے (جیسا کہ اس مقالے کی شکل ج میں واضح کیا گیا ہے)۔

[∴ ا ط کی نسبت ط ل سے وہی ہو گی جو ا ط کو د ح سے ہے]

لہٰذا، عمود د ح ۔ ل ط کے برابر ہے۔

[چونکہ د ز اور ط ہ متوازی ہیں اور دو متوازی خطوط ۔ د ک اور ب ج کے درمیان واقع ہیں]

د ز برابر ہے، ہ ط کے۔

پس، د ز اور د ح کا مجموعہ {ہ ل} کے برابر ہے۔ [19]

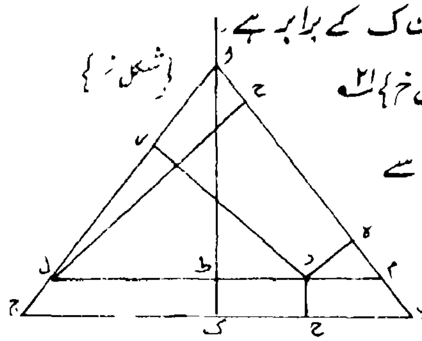
(و ذلک ما اردنا ان نبین)

۵

ہم مثلث متساوی الساقین کو پھر سے لیتے ہیں اور اس میں ایک نقطہ فرض کرتے ہیں۔ (مثلث ا ب ج [20]

میں یہ نقطہ د ہے) اور اس نقطے سے [ساقین اور قاعدے پر] عمود د ہ ۔ د ز اور د ح گراتے ہیں۔
اور نقطہ د سے خط ب ج کے متوازی ایک خط م د ل کھینچتے ہیں [نقطہ ا سے قاعدے پر] عمود
[ا ک] نکالتے ہیں [اور خطوط ا ک اور م ل کے نقطۂ انقطاع کو ط فرض کر لیتے ہیں۔ اب
فرض کریں کہ ایک نقطہ ن خط ط ا (اگر ضروری ہو تو بڑھا کر) پر یوں ہے کہ] ا ط کی
نسبت [ط ن] سے ویسی ہی ہے جیسی کہ ا ب کو [ب ج] سے اور [اس طرح کیونکہ
مثلثات ا ب ج اور ا م ل متشابہ ہیں] جیسی کہ ا م کو م ل سے ہے۔

دعویٰ یہ ہے کہ عمود د ز ۔ د ہ اور د ح کا مجموعہ ن ک کے برابر ہے۔



[شکل ز]

ثبوت: ([نقطہ ل سے دوسری ساق یعنی (ا ب پر) عمود [ل خ] [21]
نکالتے ہیں)۔ [ہم نے فرض کیا ہے کہ] ا ط کو ط ن سے
وہی نسبت ہے جو ا م کو م ل سے ہے۔ اور
[مثلث ا م ل میں شکل ج کے مطابق ا ط :
ل خ : : ا م : م ل لہٰذا] ط ن برابر ہے [ل خ] کے۔

اب (چونکہ مثلث د ل م جو مثلث ا ب ج کے متشابہ ہے، ایک متساوی الساقین مثلث ہے تیسرے
مسئلہ کے مطابق]۔ عمودین د ہ اور د ز کا مجموعہ برابر ہے [ل خ] کے۔

لہٰذا عمودین د ہ اور د ز کا مجموعہ برابر ہے عمود [ط ن] کے۔

اب عمود [د ح] برابر ہے عمود ط ک کے [کیونکہ یہ دونوں عمود متوازی خطوط کے درمیان و
ہیں] پس تینوں عمود د ہ ۔ د ز اور د ح کا مجموعہ برابر ہے عمود ن ک کے۔ [22]
(وذٰلک ما اردنا بیانہ)

اس ثبوت کا اطلاق تمام متساوی الساقین مثلثوں پر ہے خواہ وہ [یعنی اُن کا معکوس زاویہ] حادہ
ہو، قائمہ ہو یا منفرجہ ہو۔ (مسلسل)

حواشی و حوالہ جات

۱۴ - ابن الہیثم کا یہ پانچواں مسئلہ رسالہ میں کچھ کا کچھ ہو گیا ہے۔ دیکھئے نوٹ ۱۶ ا جیسا کہ قوسین سے ظاہر
ہے، مسئلہ کا باقاعدہ بیان بھی رسالہ میں موجود نہیں۔

۱۴- ا یہ خیال رہے کہ خط ط ا سے مراد وہ خطِ مستقیم ہے جو نقطہ ط سے شروع ہو کر نقطہ ا سے مثلث کے باہر گزر جاتا ہے نیز یہ کہ نقطہ ل نقاط ط اور ا کے درمیان ہو سکتا ہے، یا SEGMENT ط ا- سے باہر خط ط ا پر کہیں بھی ہو سکتا ہے۔

۱۵- نقطہ ل کی پوزیشن کسی شکل میں بھی نہیں دی جا سکتی۔ کیونکہ اس نقطے کی پوزیشن مثلث کے زاویوں کی کیت پر منحصر ہے۔ نیز یہ کہ اس نقطہ کی پوزیشن کا صحیح معنوں میں اس مسئلہ سے کوئی تعلق نہیں۔ اگر زاویہ معکوس ۶۰° سے کم ہو تو نقطہ ل خط ط ا پر نقاط ط اور ا کے درمیان کسی جگہ ہو گا، اگر زاویہ معکوس ۶۰° سے زیادہ ہو تو نقطہ ل خط ط ا (بڑھایا ہوا) پر مثلث سے باہر واقع ہو گا۔ (اگر زاویہ معکوس ۶۰° کے برابر ہو تو نقطہ ل نقطہ ا پر واقع ہو گا۔ لیکن اس کا سوال یہاں پیدا ہی نہیں ہوتا کیونکہ زاویہ معکوس کے ۶۰° کے برابر ہونے سے مثلث ایک متساوی الاضلاع مثلث ہو جائیگی جو کہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔)

رسالہ میں نقطہ ل کی پوزیشن دکھائی گئی ہے۔ لیکن اس سے مسئلہ کے سمجھنے میں اور بھی الجھاؤ پیدا ہو جاتا ہے!

۱۶- رسالہ میں جو مسئلہ ہے اسے ہم یوں بیان کر سکتے ہیں:-

مثلث متساوی الساقین میں کسی ایک ساق کے کسی نقطے سے دوسری ساق اور قاعدے پر گرائے گئے عمودوں کا مجموعہ مثلث کے عمود کے برابر ہے۔

دی ہوئی شکلوں میں یہ دعویٰ یوں ہوا، د ز اور د ح مل کر ا ہ کے برابر ہیں۔

علاوہ اس امر کے کہ رسالہ میں دیئے ہوئے ثبوت کا پھر کوئی معنی نکالنا ناممکن ہو گا، یہ مسئلہ قطعاً غلط ہے۔

دی ہوئی شکلیں فرض کریں۔

(۱) فرض کریں کہ معکوس زاویہ حادہ (ACUTE) ہے:

ا ہ = ا ط + ہ ط، اور زاویہ ا ک د = زاویہ ا د ک = زاویہ ا ب ج، اور (کیونکہ ہ ط اور د ز متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں) ہ ط = د ز۔

∴ ا ہ = ا ط + د ز

پھر، مثلث ادک اور مثلث اب ج متشابہ ہیں

∴ مثلث ادک متساوی الساقین ہے۔

∴ اد ≠ دک (کیونکہ اگر اد = دک ہو تو مثلث ادک ایک متساوی الاضلاع مثلث ہوگی۔ لیکن ایسا نہیں ہے)

∴ اط ≠ دح (کیونکہ اط × دک = دح × اد، لیکن اد ≠ دک)

∴ (اط + ہط) ≠ (دح + ہط)

∴ (اط + ہط) ≠ (دح + دز)

∴ اہ ≠ (دح + دز)

(ii) اب معکوس (VERTICAL) زاویئے کو قائمہ مان لیں:

چونکہ زاویہ ب ا ج = قائمہ، ب ا عمود ہے ا ج پر، اور د ا عمود ہے ا ج پر (نقطہ د سے) یعنی نقطے ح اور ا COINCIDERS ہیں۔

اب (پہلے کی طرح) ہط = دز

∴ اہ = اط + دز

POTENUSE)

اب، مثلث اطد میں (جو کہ قائمہ مثلث ہے)۔ اط ایک ضلع ہے اور اد اسکا وتر

∴ اط ≠ اد

∴ اط ≠ دح (کیونکہ اد = دح)

∴ (اط + ہط) ≠ (دح + ہط)

∴ اہ ≠ (دح + دز)

(iii) اب معکوس (VERTICAL) زاویہ کو منفرجہ (OBTUSE) مان لیں:-

چونکہ زاویہ ب ا ج قائمہ سے بڑا ہے۔ نقطہ ح مثلث سے باہر ہوگیا۔

اب (پہلے کی طرح) ہط = دز

∴ اہ = اط + دز

∴ د ح کی نسبت ا ک سے وہی ہے جو د ک کو ا ک سے ہے۔

اب، چونکہ مثلث ا ک د (جوکہ ا ب ج کی متشابہ ہے) متساوی الاضلاع نہیں،

ا ک ≠ د ک

∴ ا ہ ≠ (د ن + د ح)

۱۷۔ "ہم ب ط کو ملاتے ہیں اور ک سے گزارتے ہیں۔ پس د ک خط ب ج کے متوازی ہوگا کیونکہ ا ب کو ب د سے وہی نسبت ہوگی جو ا ہ کو ہ ط سے ہے۔"

اگر د ک کو پہلے ہی مان نہ چکے ہوتے تو نقطہ ط کی تعریف ممکن نہ ہوتی اور اس طرح یہ مسئلہ (THEOREM) ہی بیان نہ ہو پاتا۔

ویسے "ب ط" غالباً د ک کے لئے اور "ک" نقطہ ط کے لئے آیا ہے۔

۱۸۔ "اور ا د کی نسبت د ب سے وہی ہوگی جو ا ط کو ط ل سے ہے۔"

یہ مناسبت صحیح ہے۔ لیکن یہاں پر یہ بے محل ہے کیونکہ اس تناسب کو اسی وقت ثابت کیا جا سکتا ہے جبکہ ط ل کو د ح کے برابر ثابت کیا جا چکا ہو۔

۱۹۔ یہ ثبوت صرف معکوس زاویہ = حادہ (ACUTE) کے لئے صحیح ہے۔ اگر نقاط ا اور ح کو ایک تصور کر لیا جائے تو قائمہ زاویئے کے لئے بھی صحیح ہے۔ لیکن اگر زاویہ معکوس منفرجہ (OBTUSE) ہو تو مثلثات د ح ک اور ا ط ک کو متشابہ ثابت کر کے یہ اخذ کرنا ہوگا کہ د ح : ا ط :: د ک : ا ک، نیز چونکہ مثلثات ا د ک اور ا ب ج متشابہ ثابت ہیں اس لئے

د ح : ا ط :: ب ج : ا ج (کیونکہ ب ج : ا ج :: د ک : ا ک)

اب چونکہ یہ فرض کر چکے ہیں کہ ل ط : ا ط :: ب ج : ا ج، یہ بات ثابت ہوئی کہ د ح : ا ط :: ل ط : ا ط۔ لہذا د ح = ل ط اور (د ن + د ح) = (ہ ط + ل ط) = ہ ل۔

۲۰۔ رسالہ میں "ا د" دیا ہے لیکن ہمدرد ترجمہ میں اسکی تصحیح کر کے "مثلث ا ب ج" دیا گیا ہے۔

۲۱۔ رسالہ میں ل خ کی جگہ ل ن دیا ہے جبکہ اسی رسالہ کی شکل میں یہ عمود ل ج دیا ہُوا ہے چونکہ دونوں حروف (ج اور ن) پہلے ہی استعمال ہو چکے ہیں اور وہ نقطہ جسے اس ترجمہ میں خ قرار دیا گیا ہے نہ تو ج ہو سکتا ہے نہ ن۔ اس کے لئے ایک نئے حرف کی ضرورت تھی۔ چونکہ

زاویہ ا ک ط = زاویہ ح ک د۔

∴ مثلثات ا ط ک اور د ح ک متشابہ ہیں۔

∴ د ح کی نسبت د ک سے وہی ہے جو ا ط کو ا ک سے ہے۔

شکل میں ج دیا ہوا ہے یہ خیال کرتے ہوئے کہ اغلباً یہ خ سے بدل گیا ہے یہاں اُس نقطے کے لئے خ استعمال کیا گیا ہے۔

۲۲۔اس مسئلہ کا کوئی بیان "رسالے" میں نہیں۔اس ترجمے میں بھی اس کی کوشش نہیں کی گئی ہے کیونکہ ایسا کرنے میں متعدد نئی اصطلاحیں استعمال کرنا پڑتیں۔نیز ایسا کرنے سے مسئلہ کی ظاہری نوعیت بدل جاتی۔

یہاں (بظاہر) یہ ثابت کیا گیا ہے کہ (د ہ + د ن + د ح) = (ن ک)

جبکہ حقیقتاً صرف یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ن ک ایک ایسی (MAGNITUDE) فرض کر لیں جو کہ برابر ہے (د ہ + د ن + د ح) کے

(اور جیسا کہ مسئلہ میں فرض کیا گیا، اگر نقطہ۔ط۔کو ا ک اور ل م کا نقطۂ اتصال مان لیں)

تو ط ن ایک ایسی MAGNITUDE ہے جس کی نسبت ا ط سے وہی ہے جو کہ مثلث کے قاعدے کو کسی ایک ساق سے ہے۔

(نوٹ) پچھلے شمارہ میں صفحہ ۲، سطر ۴ میں زاویہ منفرجہ کے بعد عبارت "نہ ہو" پڑھی جائے۔