ساجدہ جبیں

علمِ ریاضی میں مسلمانوں کی خدمات

قرآن و حدیث میں جا بجا علم کے حصول و اشاعت کی تاکید کی گئی ہے اور علوم و فنون کا فروغ اسلامی تہذیب کا طرۂ امتیاز ہے۔ علمِ ریاضی بھی اس میں شامل ہے اور دیگر علوم کی طرح علمِ ریاضی میں بھی مسلمانوں کے شغف کا سرچشمہ قرآن حکیم کا علمی اسلوب ہے۔ قرآن حکیم میں جا بجا علم کی فضیلت بیان فرمائی گئی ہے اور اللہ کی طرف سے اپنے بندوں کو کائنات کے اندر غور و فکر کی تلقین کی گئی ہے۔ یہاں چند ان آیات کا ترجمہ پیش کیا جا رہا ہے جو سائنسی تحقیق اور علم ریاضی کے حصول کی دعوت دیتی ہیں:

۱۔ "زمین و آسمان کی تخلیق، رات دن کے اَدل بدل، کشتی کے وہ مال جو لوگوں کو فائدہ پہنچاتا ہے، لے کر دریا میں چلنے اور پانی میں جو اللہ نے آسمان سے نازل کیا اور اس سے زمین کو مردہ ہو جانے کے بعد زندہ کیا اور اس میں ہر قسم کے جانور پھیلا دیے۔ ہواؤں کے چلنے میں اور زمین و آسمان کے مابین تسخیر شدہ بادلوں میں اہلِ عقل کے لیے نشانیاں ہیں۔" (البقرہ: ۱۶۴)

۲۔ "اللہ وہ ہے جس نے سورج کو چمک والا اور چاند کو اُجالے والا بنا دیا اور ان کی منزلیں مقرر کر دیں تاکہ تم برسوں کی گنتی اور حساب جان سکو، اللہ تعالیٰ نے اسے بامقصد بنایا ہے، وہ اہلِ علم کے لیے نشانیاں کھول کھول کر بیان کرتا ہے۔" (یونس: ۵)

۳۔ اور ہم نے رات اور دن کو دو نشانیاں بنایا۔ سو رات کی نشانی کو ہم نے دھندلا بنایا اور دن کی نشانی کو ہم نے روشن بنایا تاکہ (دن کو) اپنے رب کی روزی تلاش کرو اور تاکہ برسوں کا شمار اور حساب معلوم کرو اور ہم نے ہر چیز کو خوب تفصیل کے ساتھ بیان کیا ہے۔

(بنی اسرائیل: ۱۲)

مندرجہ بالا قرآنی آیات میں مطالعہ سائنس کے ضمن میں بالخصوص فلکیاتی مظاہر کی روشنی میں علم حساب کی ضرورت و اہمیت بیان کی گئی ہے۔ اس کے علاوہ قرآن مجید میں قانون

وراثت کو تفصیل سے بیان کیا گیا ہے۔ (دیکھیے سورہ النساء آیت ۷ تا ۱۲) جو کہ کسر
حساب کی تعلیم کا تقاضا کرتا ہے۔ اسی طرح قرآن حکیم کی رو سے چاند اور سورج کی گر
کے حساب سے نمازوں کے اوقات، رمضان میں سحر و افطار کا تعین اور مواقیت
جیسے اہم دینی امور کا فیصلہ کیا جاتا ہے۔ (ملاحظہ ہو البقرہ آیت ۱۸۷ تا ۱۸۹)
نبی اکرم صلی اللہ علیہ وسلم نے بھی دینی علوم کے پہلو بہ پہلو دنیوی علوم سیکھنے کی حوصلہ افزا
فرمائی، جن میں ریاضی کی تعلیم بھی شامل ہے[1] آنحضرت کی وفات کے بعد آپ کے خلا
اور دیگر حکمرانوں نے علمی سرگرمیوں کو بے حد اہمیت دی۔
حضرت عمر رضی اللہ عنہ کا عہدِ خلافت تاریخ اسلام کا سنہری دور ہے۔ ان کا یہ فرما
اس حقیقت پر دلالت کرتا ہے کہ ان کے عہد میں حساب وکتاب کی تعلیم ضروری تھی۔
"بلادِ اسلامیہ میں سے کوئی شخص بازاروں میں دکان نہیں کھول سکتا جب تک وہ تجارت
کے بارے میں دینی احکام سے آگہی نہ رکھتا ہو"[2]
حضرت علی رضی اللہ عنہ بھی حضرت عمرؓ کی تعلیمی پالیسی پر عمل پیرا رہے۔ آ
دینی علوم کے ساتھ دنیوی علوم میں بھی مہارت رکھتے تھے اور حساب کے بہت بڑے ماہر تھے
آپ نے عربی حروفِ تہجی کی عددی علامیت کو مرتب کیا۔
حضرت معاویہ بن ابوسفیان سلطنت بنوامیہ کے بانی تھے۔ ان کو دربارِ رسالت کا
وحی ہونے کا شرف حاصل ہے۔ امام احمد نے اپنی مسند میں عرباض بن ساریہ سے
کی ہے کہ میں نے رسول اللہ صلی اللہ علیہ وسلم کو یہ فرماتے سنا ہے کہ "الٰہی! تو معاویہ
حساب سکھا دے اور اس کو عذاب سے محفوظ رکھ"[3]
دنیائے اسلام میں اعلیٰ تعلیم کا مشہور ادارہ "بیت الحکمت" کے نام سے خلیفہ ہارون الرشید

---

[1] سعید اختر، ہمارا نظام تعلیم، ص ۱۳۔ لاہور ۱۹۷۶۔
[2] محور۔ لاہور، تعلیم نمبر، ص ۴۰
[3] جلال الدین سیوطی، تاریخ الخلفاء، ص ۲۸۷ کراچی ۱۹۷۶

کے عہد میں قائم ہوا۔ یہاں تعلیم و تحقیق کا کام وسیع پیمانے پر ہوا۔ اس درس گاہ میں محمد بن موسےٰ الخوارزمی، ثابت بن قرہ، یعقوب الکندی، یحییٰ بن منصور، شجاع الحاسب جیسے نامور ریاضی دان علمی خدمات سر انجام دیتے تھے[۵۴]

احمد بن عبداللہ حبش حاسب (م ۸۳۰ء) مامون کے زمانے کا ایک ماہر ریاضی دان تھا۔ چنانچہ اسی مہارت کے باعث اس کا لقب حاسب ہو گیا تھا جس کے معنی حسابی یعنی ریاضی دان کے ہیں[۵۵] ریاضی میں علم المثلث (ٹرگنومیٹری) اس کی تحقیق کا خاص میدان تھا۔ وہ علم المثلث کے اعمال جیب زاویہ (SINE) جیب مستوی (COSINE) جیب معکوس (VERSINE) ظل (TANGENT) اور فلکیاتی مسائل کے اطلاق میں مہارت تامہ رکھتا تھا[۵۶] اس کا ایک امتیاز یہ ہے کہ اس نے ٹرگنومیٹری میں فضل جیوب (COTANGENT) اور قاطع (SECANT) کو پہلی مرتبہ رواج دیا اور ان کے نقشے تیار کیے[۵۷]

حجاج بن یوسف (م ۸۳۲ء) ریاضی میں ایک محقق کا درجہ رکھتا تھا۔ علمی دنیا میں اس کا سب سے بڑا کارنامہ یہ ہے کہ اس نے جیومیٹری کی مشہور کتاب "مقدمات اقلیدس" کو عربی زبان میں ڈھالا۔ یہ کتاب ایک یونانی ریاضی دان اقلیدس کی تصنیف تھی جو بیسویں صدی کے آغاز تک دنیا بھر کی درس گاہوں میں جیومیٹری کی واحد درسی کتاب کے طور پہ رائج تھی اور اب بھی مغرب و مشرق میں جیومیٹری کی جو کتابیں زیر درس ہیں وہ اسی کا چربہ ہیں[۵۸]

ریاضیات میں محمد بن موسیٰ الخوارزمی (م ۸۵۰ء) کی خدمات سنہری حروف میں لکھے جانے

---

[۵۴] انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا جلد دوم، ص ۵۰۵

[۵۵] ابن القفطی، تاریخ الحکما، لائبزگ ۱۹۳۰، ص ۱۷۰

[۵۶] انسائیکلوپیڈیا آف اسلام، لاہور، جلد ہفتم ۱۹۷۲، ص ۸۶۲

[۵۷] پروفیسر حمید عسکری، نامور مسلمان سائنس دان، لاہور ۱۹۶۲ء، ۲۰۱

[۵۸] ایضاً، ص ۲۰۰

کے قابل ہیں۔ ریاضی میں اس کی دو کتابیں "حساب" اور "الجبر و المقابلہ" تاریخی حیثیت کی حامل ہیں۔ ازمنہ وسطیٰ میں اہلِ یورپ نے ریاضی کی بنیادی تعلیم انہی دو کتابوں سے حاصل کی۔ مسلمانوں میں الجبرے پر سب سے پہلی کتاب جو لکھی گئی محمد بن موسیٰ الخوارزمی کی "المختصر فی حساب الجبر و المقابلہ" ہے۔ اصل کتاب کے حاشیے سے معلوم ہوتا ہے کہ اسلام میں محمد بن موسیٰ اس فن کا موجد ہے[۹]

اہلِ یورپ الخوارزمی کی کتاب "الحساب" کے ذریعے سے آگاہ ہوئے۔ کلمہ الصفر ہندی لفظ (SUNYA) کا ترجمہ ہے۔ یہی لفظ لاطینی میں (CIFRUM) ہسپانوی میں (CIFRA) فرانسیسی میں (CHIFFRE) اطالوی میں (CIFRA) اور انگریزی میں CIPHER استعمال ہوا جو پھر اختصاراً (ZERO) ہو گیا[۱۰]

اہلِ مغرب اعداد کو رومن طریقے سے لکھتے تھے جن سے حساب کے مختلف اعمال مثلاً جمع، تفریق، ضرب، تقسیم اور تحویل سخت مشکل اور پیچیدہ ہو جاتے تھے۔ گنتی لکھنے کے جو طریقے عربی ہندسوں کے رواج سے پہلے یورپ میں رائج تھے وہ نسبتاً بہت بھدے تھے[۱۱] مگر موسیٰ الخوارزمی کا "حساب"، وہ کتاب تھی جس سے اہلِ مغرب نے گنتی کے عربی طریقے کو اخذ کیا اور پھر اسے اپنی علامتوں میں تبدیل کر کے رومن طریقے کی بجائے رائج کیا۔ اس کے لیے اہلِ یورپ خوارزمی کے بہت زیادہ احسان مند ہیں[۱۲]

"حساب" اور "الجبرا"، کے علاوہ موسیٰ الخوارزمی نے ایک رسالہ لکھا جس میں زاویوں کے جیب اور ظل کے نقشے دیے گئے ہیں۔ یہ ٹرگنومیٹری میں اس کی مہارت کا ثبوت ہے۔ لیکن الخوارزمی کا سب سے بڑا کارنامہ الجبرے پر اس کی کتاب "الجبر و المقابلہ" ہے جو اپنے موضوع

۹؎ ابن القفطی، ک۔م۔ب، ص ۲۷۱

۱۰؎ علی احمد الشحات، ابوریحان البیرونی، مصر ۱۹۶۸، ص ۱۹۳

۱۱؎ انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا، جلد دوم، ص ۵۲۰

۱۲؎ پرنسپل انسائیکلوپیڈیا، ص ۱۲۳

کے لحاظ سے دنیا کی پہلی تصنیف ہے۔

خوارزمی کا الجبرا آج سے بارہ سو سال پہلے لکھا گیا تھا، جب دنیا میں انسانی علم موجودہ زمانے کی بہ نسبت نہایت ہی محدود تھا۔ لیکن اس کے باوجود اس کے الجبرے میں جو سوالات حل کیے گئے ہیں ان سے بیشتر ایسے ہیں جو آج بھی ہمارے ہائی سکولوں کے ریاضی کے نصاب میں شامل ہیں۔ اس الجبرے میں عام ابتدائی قاعدوں کے بعد جو شے سب سے اہم نظر آتی ہے وہ مساواتیں حل کرنے کے طریقے ہیں، ان میں سے ہر طریقے کی وضاحت پہلے مثالوں سے کی گئی ہے اور پھر اس کے حل کرنے کے کلیے کا استخراج کیا گیا ہے اور یوں ریاضی میں استقرائی طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔

سب سے پہلے وہ مساواتوں کی عام تشریح ان الفاظ میں کرتا ہے :

الجبرے میں جو مساواتیں اور ان پر مبنی سوالات آتے ہیں ان میں عموماً تین چیزیں ہوتی ہیں :

۱۔ نامعلوم شے جس کی قیمت نکالنا مقصود ہوتا ہے۔

۲۔ اس نامعلوم شے کا مربع۔

۳۔ کوئی عدد یا اعداد جن کی مدد سے اس نامعلوم شے کی قیمت نکالی جاتی ہے۔

مثلاً $\text{لا}^{۲} + ۱۰\,\text{لا} = ۳۹$

ایک مساوات ہے جس میں "لا" ایک نامعلوم شے ہے۔ $\text{لا}^{۲}$ اس نامعلوم شے کا مربع ہے اور ۳۹ ایک عدد ہے۔"

مساوات کی عام تشریح کرنے کے بعد خوارزمی نے ان مساوات کو جس میں پہلے اور دوسرے درجے کی مساواتیں شامل ہیں اپنے مخصوص طریقے سے چھ قسموں میں تقسیم کیا ہے اور ان کے حل کرنے کے طریقوں کی وضاحت مثالوں سے کی ہے جو یہ ہیں حسب ذیل ہیں :

۱۔ اس میں ایک نامعلوم شے کا مربع یا اس کے چند گنا [illegible] ہوتا ہے۔

مثلاً $\text{لا}^{۲} = ۵\,\text{لا}$

۲۔ اس میں نامعلوم شے کا مربع یا مربع کا چند گنا ایک نامعلوم [illegible] ہوتا ہے۔

مساوات میں اگر نامعلوم شے کے مربعے کا چند گنا ایک خاص عدد کے برابر ہو تو پہلے نامعلوم شے کے مربعے کی قیمت معلوم کرنی چاہیے۔ پھر اس کا جذر لینے سے نامعلوم شے کی قیمت نکالی جاسکتی ہے۔

مثلاً ۵ لا^2 = ۸۰

۳۔ اس میں نامعلوم شے کا چند گنا ایک خاص عدد کے برابر ہوتا ہے۔

مثلاً ۴لا = ۲۰

۴۔ اس میں نامعلوم عدد کا مربع اور اس عدد کا چند گنا ایک خاص عدد کے برابر ہوتا ہے۔

مثلاً لا^2 + ۱۰لا = ۳۹

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے پہلے لا کے عددی سر کا نصف نکالیں پھر اس کا مربع نکالیں اور اسے دوسری طرف کے عدد میں جمع کریں، اس طرح جو عدد حاصل ہو اس کا جذر معلوم کریں۔ اس جذر میں سے لا کے عددی سر کے نصف کو تفریق کریں تو حاصل تفریق لا کی مطلوبہ قیمت ہوگی۔

۵۔ اس میں نامعلوم عدد کے مربعے یا اس کے چند گنے اور ایک دیلے ہوئے عدد کا مجموعہ اس عدد کے چند گنے کے برابر ہوتا ہے۔

مثلاً لا^2 + ۲۱ = ۱۰

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے پہلے لا کے عددی سر کا نصف لیں، پھر اس کا مربع نکالیں، اس میں سے دوسری طرف کا عدد تفریق کریں۔ اس طرح جو حاصل تفریق نکلے، اس کا جذر معلوم کریں۔ اس جذر کو جب لا کے عددی سر کے نصف میں سے تفریق کریں گے تو حاصل تفریق لا کی ایک قیمت ہوگی۔ اور جب اس جذر کو لا کے عددی سر کے نصف کے ساتھ جمع کریں گے تو حاصل جمع لا کی دوسری قیمت ہوگی۔ مثلاً اوپر کی مساوات میں لا کا عددی سر ۱۰ ہے، اس کا نصف ۵ ہے۔ ۵ کا مربع ۲۵ ہے۔ اس میں سے دوسری طرف کا عدد یعنی ۲۱ تفریق کرنے سے ۴ حاصل ہوتے ہیں، ۴ کا جذر ۲± ہے۔ اس جذر

کو لا کے عددی سر کے نصف یعنی ۵ سے تفریق کرنے سے ۳ حاصل ہوتے ہیں۔ پس لا کی قیمت ۳ ہے۔ نیز اس جذر ۲ کو لا کے عددی سر کے نصف یعنی ۵ میں جمع کرنے سے ۷ حاصل ہوتے ہیں۔ پس لا کی دوسری قیمت ۷ ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کی شرائط پر دو عدد پورے اُترتے ہیں۔ ایک ۳ ہے جس کا مربع ۹ ہے اور ایک ۷ ہے جس کا مربع ۴۹ ہے۔ اس خاص قسم کی مساوات کے حل کی تشریح کرتے ہوئے خوارزمی مزید لکھتا ہے:

"جب کبھی تم کو ایسے مساوات سے واسطہ پڑے تو آخر میں تمھیں جمع اور تفریق کے دونوں عمل کرنے پڑیں گے۔ اگر ایک عمل سے جواب نہیں نکلے گا تو دوسرے عمل سے نکل آئے گا۔ لیکن اکثر اوقات جمع اور تفریق کے دونوں عملوں سے دو جواب نکل آئیں گے۔

ایسی مساواتوں کے متعلق ایک اور بات ذہن میں رکھنے کے قابل ہے، وہ یہ ہے کہ جب تم لا کے عددی سر کا نصف لے کر اس کا مربع نکالتے ہو تو اس مربع کے لیے ضروری ہے کہ وہ دوسری طرف کے عدد سے بڑا ہو۔ کیونکہ مساوات کو حل کرنے کے دوران میں اس مربع میں سے دوسری طرف کے عدد کو تفریق کرنا ہوتا ہے۔ لیکن اگر یہ مربع دوسری طرف کے عدد سے چھوٹا ہو تو پھر اس مساوات کا کوئی حل نہیں نکلے گا۔ اگر یہ مربع دوسری طرف کے عدد سے برابر ہو تو پھر اس مساوات کا صرف ایک حل نکلے گا جو لا کے عددی سر کے نصف کے برابر ہو گا۔ اس حالت میں تمھیں آخر میں جمع یا تفریق کا کوئی عمل نہیں کرنا پڑے گا۔

۶۔ اس مساوات میں نامعلوم عدد کے چھ گنے اور ٹھیک دیے ہوئے عدد کا مجموعہ اس نامعلوم عدد کے مربع یا اس کے چند گنے کے برابر ہوتا ہے۔

مثلاً ۳ لا + ۴ = لا^۲

اس مساوات کو حل کرنے کا طریقہ یہ ہے کہ پہلے لا کے عددی سر کا نصف لیں، اور اس کا مربع نکالیں، پھر اس میں اس طرف کا عدد جمع کریں اور حاصل جمع کا جذر نکالیں اس جذر میں لا کے عددی سر کا نصف جمع کرنے سے لا کی مطلوبہ قیمت نکل آئے گی۔

مثلاً اوپر کی مساوات میں لا کا عددی سر ۳ ہے اس کا نصف $\frac{3}{2}$ یعنی $1\frac{1}{2}$ ہے۔
۔ کا مربع $\frac{9}{4}$ یا $2\frac{1}{4}$ ہے۔ اس میں اس طرف کا عدد یعنی ۴ جمع کرنے سے $6\frac{1}{4}$ یا $\frac{25}{4}$
اصل ہوتا ہے۔ $\frac{25}{4}$ کا جذر $\frac{5}{2}$ یعنی $2\frac{1}{2}$ ہے۔ اس کو لا کے عددی سر کے نصف
نی $1\frac{1}{2}$ میں جمع کرنے سے ۴ حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے لا = ۴

الجبرے کی موجودہ زمانے کی کتابوں میں عام دستور ہے کہ مساواتوں کے حل کرنے ے قاعدے سکھانے اور ان کی مثالوں کی مشق کروانے کے بعد ایسے عبارتی سوالات پیش ے جاتے ہیں جن میں ان مساواتوں کا عملی اطلاق ہوتا ہے۔ یہی طریقہ خوارزمی نے بھی اپنے بیرے میں اختیار کیا ہے۔ چنانچہ مساواتوں کی ان چھ قسموں کے حل کرنے کے قاعدے ران کی امثلہ رقم کرنے کے بعد اس نے ان مساوات پر مبنی چھ عبارتی سوالات مع ان کے ل کے درج کیے ہیں۔ ان کے علاوہ محمد بن موسیٰ الخوارزمی نے اپنے شہرۂ آفاق الجبرے میں عض زائد سوالات اور ان کے حل بھی درج کیے ہیں[13]

خوارزمی کے الجبرے کی ایک خصوصیت یہ بھی ہے کہ اس میں الجبرے کے متعدد سوالات جیومیٹری کی اشکال سے بھی حل کیا گیا ہے اور یہ خوارزمی کی خاص اختراع ہے جس کا اتباع مغرب ے ریاضی دانوں نے کیا ہے[14]

الخوارزمی کے الجبرے میں کچھ جیومیٹری کے حصے بھی شامل ہیں۔ اس نے قائمۃ الزاویہ ثلثوں کا ایک مسئلہ اخذ کیا اور اس کو سادہ ترین صورت میں ثابت کیا جب کہ قائمۃ الزاویہ مثلث نماثل الساقین ہو۔ اس کے علاوہ اس نے مثلث متوازی الاضلاع اور دائرے کے رقبے معلوم کرنے کے طریقے بھی پیش کیے ہیں۔

---

[13] پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۲۳۱—۲۶۲

[14] GEORGE SARTON, INTRODUCTION TO HISTORY OF SCIENCE VOL. I WASHINGTON, 1950, P. 565

π کے لیے اس نے ۳ ۱/۷ قیمت استعمال کی۔ اس کے علاوہ π کی دو مزید قیمتیں π = √۱۰ اور π = ٦٢٨٣٢/٢٠٠٠٠ کو بھی استعمال کیا۔ جب ان کے الجبرے کا لاطینی میں ترجمہ کیا گیا تو الخوارزمی سے الگورتھمی بن گیا جس سے موجودہ لفظ الگورتھم وجود میں آیا[15] الخوارزمی نے "خیالی مقداروں کے نظریے" کے یک درجی اور دو درجی مساواتوں کے تحلیلی اور ترسیمی حل بھی پیش کیے[16]

خوارزمی نے اپنا الجبرا وراثت، قانون حصص، عدالتی دعووں اور تجارتی معاملات کے متعلق لوگوں کی عملی ضروریات کو پورا کرنے کے لیے لکھا اور ان مسائل کو موضوع بنایا، جن کا تعلق علم الفرائض سے ہے[17]

مامونی عہد کا ایک نامور ریاضی دان موسیٰ بن شاکر اپنے ایام شباب میں ایک بہادر راہزن تھا۔ لیکن بعد میں توبہ کرکے مامون کے مصاحبوں میں شامل ہوگیا اور علمی زندگی اختیار کرلی۔ اس نے علم ہندسہ میں شہرت حاصل کی تھی۔ چنانچہ القفطی اس کے لیے "مقدم فی علم الہندسہ" یعنی علم ہندسہ کے ماہر کا لقب استعمال کرتا ہے[18] اس نے مثلث کا رقبہ اس کے اضلاع کی مدد سے نکالنے کا مشہور فارمولا پیش کیا[19]

15- CAJORI, HISTORY OF MATHEMATICS, LONDON 1919 PP. 102-104

16 M. ABDUR REHMAN KHAN, A BRIEF SURVEY OF MUSLIM CONTRIBUTION TO SCIENCE AND CULTURE, LAHORE 1946, PP. 11, 12

17 SOLOMON GANDZ, THE ALGEBRA OF INHERITENCE OSIRIS 1938, P. 324.

18 ابن القفطی، ک۔م۔ب ص ١٧٠

19 کاجوری، ک۔م۔ب ص ١٠٤

محمد بن موسیٰ بن شاکر (م ۸۷۲ء) موسیٰ بن شاکر کا سب سے بڑا بیٹا تھا۔ یہ علمِ ہیئت اور ریاضی کا بہت ماہر تھا۔ اس نے دو مقداروں کے درمیان دو وسطی متناسب مقداروں کے معلوم کرنے کا طریقہ دریافت کیا تھا۔[۲۰]

حسن بن موسیٰ بن شاکر موسیٰ بن شاکر کا سب سے چھوٹا بیٹا تھا۔ وہ علم ہندسہ کا بہت بڑا محقق تھا۔ اس نے اقلیدس کے صرف چھ بڑے مقالے پڑھے تھے لیکن اپنی جدّتِ طبع سے چند ایسے مسائل ایجاد کیے جن تک قدماکے ذہن کی رسائی نہ ہو سکی تھی۔ حسن کی طبعِ رسا اور قوتِ غور و فکر کا اندازہ اس واقعہ سے کیا جا سکتا ہے جسے القفطی نے تفصیل سے بیان کیا ہے کہ اس کے زمانۂ طالب علمی میں مامون کے دربار میں خلیفہ کے ایما پر خالد بن عبدالملک نے حسن کا امتحان لیا۔ اس وقت تک اس نے اقلیدس کے چند مقالے پڑھ رکھے تھے، لیکن مامون اور اہلِ دربار کو یہ دیکھ کر بہت تعجب ہوا کہ جب اس سے اس کے آگے کے مسائل پوچھے گئے تو اس نے محض اپنی قوتِ متخیلّہ سے ان کے حل پیش کر دیے جو نہ صرف درست تھے بلکہ بعض اقلیدس سے مختلف تھے۔ یہ اس امر کا ثبوت تھا کہ یہ حل اس کے دماغ کی ایجاد ہے۔ اس کے ایجاد کردہ مسائل میں زاویہ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنا بھی شامل ہے اور اس موضوع پر "قسمۃ الزاویہ بثلاثۃ اقسام متساویہ" کے نام سے اس نے ایک کتاب بھی لکھی ہے۔[۲۱]

حسن بن موسیٰ بن شاکر کا جیومیٹری میں خاص کارنامہ وہ مسائل ہیں جو اس نے قطع ناقص (ELLIPSE) کے متعلق بیان کیے ہیں۔ اس سے قبل ریاضی دان صرف دائرے کے مسائل ہی سے واقف تھے، نہ وہ بیضے کے مسائل سے آگاہ تھے نہ بیضے کے بنانے کا قاعدہ جانتے تھے۔[۲۲]

---

[۲۰] پروفیسر حمید عسکری، ک-م-ب، ص ۲۰۵

[۲۱] ابن القفطی، ک-م-ب، ص ۴۴۳-۴۴۱

[۲۲] جارج سارٹن، ک-م-ب، ص ۵۶۱

یعقوب الکندی (م ۸۷۳ء) ایک ہمہ گیر شخصیت کا مالک تھا، اس کی تحقیق کا دائرہ بہت وسیع تھا۔ ریاضی میں علم الاعداد اس کا خاص میدان تھا۔ اس سے پہلے اعداد نویسی کے نئے طریقے سے محمد بن موسیٰ خوارزمی متعارف کرا چکا تھا، لیکن کندی نے اس طریقے کو اتنا آگے بڑھایا کہ محض اعداد اور ان کی خاصیتوں کے بارے میں اس کے قلم سے چار کتابیں مرتب ہوگئیں۔ ان کی تصانیف کی مجموعی تعداد ۲۶۵ تھی۔ ان میں حساب پر گیارہ شامل تھیں[۲۳] ان کتابوں میں اعداد کی ہم آہنگی، اطلاقی اعداد، اضافی مقدار اور اعداد کے ذریعے پیش گوئی جیسے موضوعات شامل تھے[۲۴]

ثابت بن قرہ حرانی (م ۹۰۱ء) کو ریاضی سے بہت دلچسپی تھی۔ ثابت اور اس کے ساتھیوں کی ایک نمایاں خدمت یہ ہے کہ انھوں نے قدیم یونانی فلکیات اور ریاضی کو عربی میں منتقل کیا[۲۵]۔ ثابت بن قرہ نے سال کی صحیح مدّت کے تعیّن کی کوشش کرتے ہوئے سال کی کمیت ۳۶۵ دن ۶ گھنٹے ۹ منٹ اور ۱۰ سیکنڈ بتائی جو موجودہ تحقیق کے بہت قریب ہے[۲۶] ثابت بن قرہ کا ایک بہت بڑا کارنامہ موافق اعداد (AMICABLE NUMBERS) کے متعلق کلیے کا استخراج ہے جس سے اس کی ریاضی دانی کا کمال ظاہر ہوتا ہے۔

"کوئی مرکب عدد جن چھوٹے عددوں پر باری باری پورا تقسیم ہوتا جائے وہ چھوٹے عدد اس مرکب عدد کے اجزائے مرکبہ کہلاتے ہیں۔ مثلاً ۲۰ ایک مرکب عدد ہے جسے باری باری ۱، ۲، ۴، ۵ اور ۱۰ پر تقسیم کیا جا سکتا ہے، اس لیے ۱، ۲، ۴، ۵ اور ۱۰ یہ پانچوں عدد ۲۰ کے

---

۲۳ ALI ABDULLAH AL-DAFFA, THE PHILOSOPHER OF THE ARABS P. 185

۲۴ GEORGE N. ATIYAH, AL-KINDI - THE PHILOSOPHER OF THE ARABS P. 185

۲۵ ابن القفطی، ک۔م۔ب، ص ۱۲۰

۲۶ عمر فروخ، تاریخ الفکر العربی، بیروت ۱۹۶۲، ص ۲

اجزائے مرکبہ ہیں لیکن چونکہ ۲۰ کو ۳، ۶، ۷، ۸ اور ۹ پر پورا پورا تقسیم نہیں کیا جا سکتا، اس لیے یہ پانچوں عدد ۲۰ کے اجزائے مرکبہ نہیں ہیں۔ یہاں یہ امر یاد رہے کہ کسی عدد کے اجزائے مرکبہ اور اجزائے ضربی میں بڑا فرق ہے۔ اجزائے ضربی ہمیشہ مفرد ہوتے ہیں اور ان کا حاصل ضرب اس عدد کے عین برابر ہوتا ہے۔ مثلاً بیس کے اجزائے ضربی ۱، ۲، ۲ اور ۵ ہیں جو سب کے سب مفرد ہیں اور ان کا حاصل ضرب ۲۰ ہے، لیکن اجزائے مرکبہ مفرد اور مرکب دونوں ہو سکتے ہیں۔ علاوہ ازیں ان کا حاصل ضرب اس عدد کے برابر نہیں ہوتا۔ جب دو مرکب اعداد ایسے ہوں کہ پہلے عدد کے اجزائے مرکبہ کا مجموعہ دوسرے عدد کے برابر ہو جاتے اور دوسرے عدد کے اجزائے مرکبہ کا مجموعہ پہلے عدد کے برابر ہو جائے تو یہ دونوں عدد آپس میں موافق عدد کہلاتے ہیں۔

موافق عددوں میں عام طور پہ ۲۲۰ اور ۲۸۴ کی مثال دی جاتی ہے۔ ۲۲۰ کے اجزائے مرکبہ ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۴۴، ۵۵ اور ۲۱۰ ہیں۔ ان کا مجموعہ ۱ + ۲ + ۴ + ۵ + ۱۰ + ۱۱ + ۲۰ + ۲۲ + ۴۴ + ۵۵ = ۴۸۴ بنتا ہے۔ اور ۲۸۴ کے اجزائے مرکبہ ۱، ۲، ۴، ۷۱ اور ۱۴۲ ہیں ان کا مجموعہ ۱ + ۲ + ۴ + ۷۱ + ۱۴۲ = ۲۲۰ بنتا ہے۔ اس وجہ سے ۲۲۰ اور ۲۸۴ موافق اعداد ہیں۔

ریاضی دانوں نے موافق عددوں کے اس طرح کے بعض دیگر جوڑے بھی معلوم کیے ہیں۔ لیکن ثابت بن قرہ کا کمال یہ ہے کہ اس نے ایسے عددوں کے جوڑے کے لیے ایک کلیہ معلوم کیا جو درج ذیل ہے:

تین عدد ا، ب اور ج ایسے لو کہ

$$\text{ا} = ۳ \times (۲)^{\text{ع}} - ۱ \qquad \text{ب} = ۳ \times (۲)^{\text{ع}-۱} - ۱$$

$$\text{ج} = ۳ \times ۳ \times (۲)^{۲\text{ع}-۱} - ۱$$

جبکہ ع کی قیمت ۱، ۲، ۳، ۴ وغیرہ میں سے کوئی سی لی جا سکتی ہے۔ تب اگر ا، ب اور ج مفرد عدد ہوں تو $(۲)^{\text{ع}} \times$ ا ب اور $(۲)^{\text{ع}} \times$ ج موافق عدد ہوں گے۔

موافق عددوں کے متعلق مندرجہ بالا کلیہ اتنا مشکل ہے کہ موجودہ زمانے میں بھی صرف

اعلیٰ ریاضی کے ماہرین ہی اس کا استخراج کر سکتے ہیں۔ اس سے اندازہ ہو سکتا ہے کہ نویں صدی میں اس سائنس دان کا ریاضی کا علم کتنا اعلیٰ تھا۔

ریاضی میں اس نے موافق اعداد کے علاوہ جیومیٹری کی بعض اشکال کے متعلق ایسے مسائل اور کلیے دریافت کیے جو اس سے پہلے معلوم نہ تھے۔ اقلیدس کا ترجمہ حنین بن اسحٰق نے کیا تھا۔ ثابت نے اس پر نظر ثانی کی اور اسے مزید سلیس اور واضح کیا۔[۲۷]

اس نے مربع اور مکعب پر بھی کتابیں لکھیں اور مماثنے کے طریقے کو استعمال کیا جس سے کلیات کے متنوع نتائج کی ترقی پذیر صلاحیت کا پتا چلا۔ اس نے مخروطی اشیا کے مطالعہ کو آگے بڑھایا اور کسی مخروطی جسم کے قطعے کا رقبہ معلوم کرنے کا طریقہ بھی دریافت کیا۔[۲۸]

ثابت کے بعد اس کے بیٹے سنان بن ثابت اور پوتے ابراہیم بن سنان نے طب اور ہندسہ میں بہت شہرت حاصل کی اور ان علوم پر نہ صرف متعدد کتابوں کے ترجمے کیے بلکہ خود بھی کتابیں لکھیں۔[۲۹]

ثابت بن قرہ کا ایک رسالہ قطع مکافی (PARABOLA) اور قطع زائد (HYPERBOLA) پر ہے۔ اسے جرمن محقق سوتر (SUTER) نے جرمن زبان میں منتقل کیا اور اس پر ایک تمہید لکھ کر ۱۹۱۸ میں طبع کرایا۔

اسی طرح ایک اور رسالہ منتظم مسبع (REGULAR HEPTAGON) پر ہے جو یونانی سائنس دان ارشمیدس کی ایک تصنیف کا عربی ترجمہ ہے۔ مشہور جرمن محقق سکائے (SCHOY) نے اس کا ترجمہ جرمن زبان میں کیا جو ۱۹۲۶ میں شائع ہوا۔[۳۰]

۲۷ے ابن ابی اصیبعہ، طبقات، مصر ۱۹۶۵، ص ۲۱۶

۲۸ے حسین نصر، علم ریاضی" (مترجمہ غلام مرتضیٰ)، سیارہ ڈائجسٹ لاہور، فروری مارچ ۱۹۸۱، ص ۳۶۲

۲۹ے ابن القفطی، ک۔م۔ب، ص ۱۹۰

۳۰ے پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۵۹۷

علم المثلث میں محمد بن جابر البتانی (م ۹۲۹ء) کی دریافتیں نہایت اعلیٰ درجے کی ہیں
اس نے زاویوں کے جیوب کا نقشہ بنایا اور دیگر نسبتوں کے ساتھ اس کے تعلق کے متعلق
بعض مساواتیں معلوم کیں۔ زاویوں کے ظل کے نقشے تو اس سے پہلے بن کر رائج ہو چکے
تھے لیکن زاویوں کے ظل التمام (COTANGENTS) کے نقشے سب سے پہلے اسی نے
کیے، وہ ان تین مسلم ریاضی دانوں میں سے ایک ہے جنھوں نے کروی مثلث
(SPHERICAL TRIANGLE) کے ضلعوں اور زاویوں میں وہ تعلق ثابت کیا جسے انگ
طرزِ تحریر میں مندرجہ ذیل طور پر تعبیر کیا جاتا ہے :

$$\cos A = \cos B \cos E + \sin B \cos C \cos A$$

اور کروی قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے اس نے درج ذیل فارمولا اخذ کیا اور رشۃ
سے اس کی وضاحت کی [۱۳]

$$\cos B - \cos B \sin A$$

البتانی نے نہ صرف صفر سے ۹۰ درجے تک جیب، ظل اور ظل التمام کی صحیح صحیح قیمتیں
معلوم کیں بلکہ اس نے کروی مثلثوں کے ٹرگنومیٹری پر الجبرے کے عوامل بھی استعمال
کیے۔ اس نے ظل التمام کے ایسے جدول تیار کیے جو درج ذیل مساوات پر
منحصر تھے [۳۲]

$$\text{Cot } A = \frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A}$$

ابو کامل شجاع بن اسلم بن محمد الحاسب مصری (م ۹۵۵ء) عالم اسلام کا دوسرا
بڑا ماہرِ الجبرا سمجھا جاتا تھا۔ الجبرے پر اس کی مایۂ ناز تصنیف اس موضوع پر الخوارزمی
کے الجبرے کے بعد دنیا کی دوسری بڑی کتاب ہے۔
الخوارزمی کے بعد سند بن علی اور ابو یوسف المصیصی نے بھی الجبرے پر مستقل کتابیں

---

[۱۳] دائرۃ المعارف الاسلامیہ، لاہور جلد ۴، ص ۲۴-۲۵
[۳۲] پروفیسر حمید عسکری ماک - م - ب، ص ۲۹۲ — ۳۰۲

لکھیں۔ لیکن ابو کامل کی کتاب ترتیب اور طرزِ بیان کے لحاظ سے بہتر ہے[۳۳ھ] خوارزمی کے الجبرے میں جو امور تشنۂ تکمیل تھے انھیں شجاع حاسب نے مکمل کیا۔ مثلاً دو درجی مساواتوں کے مزید حل نکالے[۳۴ھ]

شجاع حاسب اپنے الجبرے میں جمع، تفریق، ضرب، تقسیم کے قاعدے بیان کرنے کے بعد اس ضمن میں ایک اور قدم آگے بڑھاتا ہے اور جذری رقوم کی جمع تفریق وغیرہ کی بعض صورتیں بیان کرتا ہے۔

مثال کے طور پر دو جذر کا رقوم $\sqrt{\text{ا}}$ اور $\sqrt{\text{ب}}$ کی جمع کے بارے وہ یہ کلیہ بیان کرتا ہے:

$$\sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ا} + \text{ب} + ۲\sqrt{\text{اب}}}$$

اسی طرح دو جذری رقوم کی تفریق کے بارے میں وہ ذیل کا کلیہ پیش کرتا ہے:

$$\sqrt{\text{ا}} - \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ا} + \text{ب} - ۲\sqrt{\text{اب}}}$$

شجاع حاسب کا ایک رسالہ مخمس اور معشر اشکال پر اور ایک اور رسالہ "حساب کے نوادرات" بھی تھا[۳۵ھ]

ابو جعفر خازن (م ۹۶۵ء) ایک اور ماہر ریاضی تھا۔ ریاضی میں اس کا خاص کارنامہ یہ ہے کہ اس نے تیسرے درجے کی مساوات کو حل کرنے کا نادر طریقہ نکالا جو اس سے پہلے معلوم نہ تھا۔ کاجوری کی تحقیق کے مطابق وہ پہلا شخص ہے جس نے اس مساوات کو قطع مخروطی کے ذریعے حل کرنے کا طریقہ دریافت کیا[۳۶ھ]

علی ابن احمد عمرانی (م ۹۵۶ء) نے الجبرے پر عالم اسلام کی تیسری کتاب تالیف ک

۳۳ھ ابن الندیم، الفہرست، مصر ۱۳۴۸ھ، ص ۳۸۳

۳۴ھ جارج سارٹن، ک۔م۔ب، جلد اول، ص ۵۶۳

۳۵ھ پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۳۲۹-۳۳۷، ۶۰۳

۳۶ھ کاجوری، ک۔م۔ب، ص ۱۰۷

تھی۔ گویہ کوئی مستقل اور علیحدہ تصنیف نہیں تھی بلکہ ابو کامل شجاع حاسب مصری کے الجبرے کی تشریح تھی لیکن اس میں ان امور کی جو ابو کامل کے الجبرے میں تشنۂ تکمیل رہ گئے تھے، وضاحت کی گئی تھی اور اس کے پیچیدہ سوالوں کا حل پیش کیا گیا تھا۔[۳۷]

ابو اسحاق ابراہیم بن سنان (م ۹۴۶ء) ایک اعلیٰ پائے کا ریاضی دان اور ماہر فلکیات تھا۔ اس کا قابلِ قدر کام قطعِ مکانی پر ہے جس کے بارے میں اس نے ایسے مسائل حل کیے ہیں، جو موجودہ زمانے میں صرف تکملی احصا (INTEGRAL CALCULUS) سے حل کیے جاتے ہیں۔[۳۸]

ابو محمد حامد الخجندی (م ۹۹۳ء) "رے" کی رصدگاہ میں افسر اعلیٰ تھا، جہاں اس نے ایک نہایت ترقی یافتہ مسدس ایجاد کی۔ ریاضی میں اس نے ثابت کیا کہ اگرچہ دو مربع عددوں کا مجموعہ ایک مربع عدد کے برابر ہو سکتا ہے لیکن دو مکعب عددوں کا مجموعہ ایک مکعب عدد کے برابر نہیں ہو سکتا۔[۳۹]

اسپین کے مسلم ریاضی دانوں میں ابو القاسم بن احمد مجریطی (م ۱۰۰۷ء) ایک ممتاز حیثیت کا مالک تھا۔ ریاضی میں اس نے "المعاملات" کے نام سے تجارتی حساب پر ایک کتاب لکھی جو حساب کی اس اہم شاخ پر پہلی تصنیف تھی۔ موافق اعداد پر بھی اس نے ایک رسالہ لکھا تھا۔[۴۰]

ابو الوفا محمد بن احمد یحییٰ بن اسمٰعیل بن عباس بوزجانی (م ۹۹۸ء) کا شمار اسلامی دور کے عظیم ریاضی دانوں میں ہوتا ہے۔ اس نے الجبرے اور جیومیٹری میں بہت سے ایسے نئے مسائل اور قاعدے نکالے جو اس سے پیشتر معلوم نہ تھے۔ تاہم اس کا زیادہ کام

---

[۳۷] پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۳۳۷

[۳۸] ایضاً، ص ۳۴۵

[۳۹] ،، ، ص ۳۹۱

[۴۰] کاجوری، ک۔م۔ب، ص ۱۰۹

جیومیٹری میں ہے۔ دائرے کے اندر مختلف اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاعیں (REGURAR POLYGONS) بنانے کے مسائل قدیم زمانے سے ریاضی دانوں میں مقبول تھے۔ ان کثیر الاضلاعوں میں سے چند ضلعوں والی منتظم مسدس اور آٹھ ضلعوں والی کثیر الاضلاع منتظم مثمن بہت آسانی سے بن جاتی ہیں۔ پانچ ضلعوں کی کثیر الاضلاع منتظم اور دس ضلعوں والی کثیر الاضلاع معشر اگرچہ اتنی آسانی سے نہیں بنتیں لیکن بہرحال ان کا بنانا ناممکن نہیں ہے لیکن سات ضلعوں والی کثیر الاضلاع منتظم مسبع کا بنالینا ابوالوفا سے پہلے ناممکن خیال کیا جاتا تھا۔ ابوالوفا نے نہ صرف اس مسئلے کا حل پیش کیا بلکہ جتنا یہ مسئلہ مشکل اور پیچیدہ تھا، اتنا ہی اس کا حل سادہ تھا۔ "دائرے کے اندر ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ، اس کے ضلع کی تنصیف کرو، مثلث کا یہ نصف ضلع منتظم مسبع کے ایک ضلع کے برابر ہوگا۔ اس لیے پرکار کو اس کے برابر کھول کر دائرے کو قطع کرو، دائرے کا محیط سات حصوں میں تقسیم ہو جائے، جن کے نقاط کو ملانے سے منتظم مسبع بن جائے گی۔ ٹرگنومیٹری میں جیب التمام، ظل اور ظل التمام کی اصطلاحیں پہلے سے رائج تھیں لیکن قاطع (SECANT) اور قاطع التمام (COSECANT) کو سب سے پہلے ٹرگنومیٹری میں ابوالوفا نے داخل کیا۔[۱۳]

ٹرگنومیٹری میں ابوالوفا نے اتنی زیادہ اور اتنے اعلیٰ درجے کی دریافتیں کی ہیں کہ اسے صحیح معنوں میں ریاضی کی اس شاخ کے بہترین موجدوں میں شمار کیا جا سکتا ہے۔ اس نے زاویہ کی جیب معلوم کرنے کا ایک نیا کلیہ معلوم کیا اور اس کی مدد سے ۰ درجے سے ۹۰ کے تمام زاویوں کے جیوب کی صحیح صحیح قیمتیں آٹھ درجے اعشاریہ تک نکالیں، اس سے پہلے اگرچہ جیوب کے نقشے تیار ہو چکے تھے مگر ان کی قیمتیں اتنے درجے اعشاریہ تک نہیں ہوتی تھیں۔

ٹرگنومیٹری میں اگر دو زاویوں ا اور ب کی جیب اور جیب التمام معلوم ہوں تو ان زاویوں کے مجموعے یعنی (ا + ب) کی جیب ایک کلیے کی مدد سے نکالی جا سکتی ہے۔ کلیہ یہ ہے :

جا (ا+ب) = جا ا جتا ب - جا ب جتا ا

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

---

[۱۳] ابن خلکان، وفیات الاعیان، شمارہ نمبر ۱۵۸

اسی طرح اگر ان زاویوں کے فرق یعنی (ا-ب) معلوم کرنا ہو تو کلیہ یہ ہوگا۔

جا (ا-ب) = جا ا جتا ب + جا ب جتا ا

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

اسی طرح اگر کسی زاویے ا کی جیب التمام معلوم ہو تو اس زاویے کے نصف یعنی $\frac{ا}{۲}$ کی جیب کے ساتھ اس کا تعلق مندرجہ ذیل کلیہ سے ابوالوفا نے دریافت کیا۔

۲ جا^{۲} $\frac{ا}{۲}$ = ۱ - جتا ا

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

اور اگر ایک زاویے ا کے نصف یعنی $\frac{ا}{۲}$ کی جیب اور جیب التمام معلوم ہو تو اس زاویے ا کی جیب معلوم کرنے کا کلیہ بھی ابوالوفا نے ہی دریافت کیا تھا جو یہ ہے:

جا ا = ۲ جا $\frac{ا}{۲}$ جتا $\frac{ا}{۲}$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

ٹرگنومیٹری کے ان کلیوں کو انگریزی طرزِ تحریر میں پاکستان کے ہزاروں طلبا ہر سال پڑھتے ہیں اور انھیں بے خبری میں مغربی ریاضی دانوں کا کارنامہ سمجھتے ہیں، حالانکہ ٹرگنومیٹری کے یہ کلیے اور اس طرح کے بیسیوں دیگر کلیے اسلامی دور کے مسلم ریاضی دانوں کے کمال کے رہینِ منت ہیں۔

ابوالوفا بوزجانی نے زاویوں کے ظل کا بھی مطالعہ کیا تھا، انگریزی کی کتابوں میں TANGENT کی اصطلاح آج کل دو معنوں میں استعمال ہوتی ہے۔ ایک تو اس سے وہ خط مراد لیا جاتا جو کسی دائرے کے محیط کے ساتھ مس کرتا ہے۔ یہ جیومیٹری کا TANGENT ہوتا ہے اور دوسرے اس سے وہ نسبت مراد لی جاتی ہے جو کسی زاویے کے عمود اور قاعدے کے درمیان پائی جاتی ہے۔ یہ ٹرگنومیٹری کا TANGENT ہے۔ ایک ہی لفظ دو اصطلاحوں کے لیے استعمال کرنا اصل اصطلاح سازی کے خلاف ہے تاہم انگریزی میں یہ بے اصولی رائج ہے۔ مگر ابوالوفا اس بے اصولی کا مرتکب نہیں ہوا۔ اس نے جیومیٹری کے TANGENT کے لیے "مماس" اور

ٹرگنومیٹری کے TANGENT کے لیے ظل کی اصطلاح استعمال کی ہے۔

ٹرگنومیٹری میں زاویے کی چھ نسبتوں جیب، جیب التمام، ظل، ظل التمام، قاطع اور قاطع التمام کے باہمی تعلق کے متعلق متعدد مساواتیں بھی ابوالوفا سے منسوب کی جاتی ہیں [۴۲]
انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا میں درج ہے: "ابوالوفا کے علاوہ کسی نے خوارزمی کی کتاب کے مضامین سے آگے قدم نہ بڑھایا۔ ابوالوفا نے مساوات درجہ چہارم کو ہندسی اشکال کے ذریعے واضح کیا ہے" [۴۳]

ابن محمد ابن الحسین الکراجی دسویں صدی عیسوی کا مشہور مسلمان ریاضی دان تھا۔ اس نے سب سے پہلے الجبرے کو جیومیٹری کی بالادستی سے آزاد کرنے کی کوشش کی۔ اس نے اپنی کتاب 'الفخری' میں سب سے پہلے الجبرے میں "قوت نما" پر ایک باقاعدہ تحقیق پیش کی اور پھر اس نے حسابی عوامل کو الجبرے کی رقوم اور جملوں پر استعمال کیا اور سب سے پہلے غیر رقمی کو الجبرے میں شامل کیا۔ اس کی دوسری مشہور تخلیق "البدیع فی الحساب" میں اس نے پہلی مرتبہ ایک نامعلوم رکن والی کثیر رقمی کا جذر نکالنے کا طریقہ ہے [۴۴]

ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجستانی (۱۰۲۴ء) ریاضی کا ایک محقق تھا۔ ریاضی کی شاخ "قطع مخروطی" پر اس کی قابل قدر تحقیقات تھیں۔ اس نے قطعِ مکافی، قطعِ ناقص، قطع زائد پر قابلِ قدر کام کیا۔

قدیم زمانے سے ریاضی دان زاویے کی ہندسی تثلیث کے مسئلے کو حل کرنے میں سرگرداں تھے مگر اس میں انھیں کامیابی حاصل نہیں ہوئی تھی۔ احمد سجستانی کا یہ کمال ہے کہ اس

---

۴۲ پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۳۸۶

۴۳ انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا، جلد اول، ص ۶۱۲

۴۴ THE GLORY OF ISLAM FROM NILE TO KASHGAR
KARACHI 1983. INTRODUCTION.

نے اس ناممکن کام کو ممکن بنادیا۔ اس مقصد کے لیے اس نے جیومیٹری کی شاخ، قطع مخروطی سے مدد لی اور ایک مساوی قطع زائد (EQUILATERAL HYPERBOLA) کے ساتھ ایک دائرے کا تقاطع کر کے اس مشکل مسئلے کو حل کر دیا۔ احمد سجستانی کی تصنیفات چند رسالے ہم تک پہنچے ہیں۔ ان میں قطع مخروطی، منتظم مسبع اور زاویے کی تثلیث پر رسالے شامل ہیں[۴۵]۔

منصور بن علی بن عراق (م ۱۰۱۰ء) کو ریاضی سے خاص لگاؤ تھا۔ اس علم میں اس نے اتنا کمال پیدا کیا تھا کہ البیرونی اسے "استاذی" کے لقب سے یاد کرتا تھا۔ ٹرگنومیٹری میں کروی مثلث کے متعلق مسئلہ جیب اس کی دماغی کاوشوں کا نتیجہ تھا[۴۶]۔

ابن الہیثم (م ۱۰۴۳ء) نے ریاضی میں قابلِ قدر خدمات انجام دیں۔ الجبرا، فلکیات، جیومیٹری پر کتابیں لکھیں اور مخروطیات کی مدد سے مکعبی مساوات کا حل پیش کیا[۴۷]۔ جیومیٹری کا ایک اہم مسئلہ اس کے نام سے منسوب ہو کر مسئلہ الہیثم کہلاتا ہے[۴۸]۔ اس نے ہندسی بصریات کے متعدد پیچیدہ مسائل کا حل بھی دریافت کیا۔ علم ہندسہ پر اس کی دس کتابوں کی فہرست ملتی ہے جن میں اقلیدس کے اصولوں سے استفاضے کے ساتھ ساتھ ان پر تبصرہ و تنقید بھی شامل ہے[۴۹]۔ ابن الہیثم ماہر ریاضی دان، ماہر فلکیات، ماہر طبیعیات اور بہترین سرجن تھا۔ بقول حکیم محمد سعید وہ دسویں صدی میں بیسویں صدی کے دماغ

---

۴۵ پروفیسر حمید عسکری، ک۔ م۔ ب، ص ۴۴۵ - ۴۵۱

۴۶ ایضاً، ص ۴۵۴ - ۴۵۶

۴۷ DAVID ENGENE SMITH, HISTORY OF MATHEMATICS, VOL. I PP. 175, 176

48 HAWARD EVES, AN INTRODUCTION TO HISTORY OF MATHEMATICS, P. 194

49 ALI ABDULLA AL-DAFFA, THE MUSLIM CONTRIBUTION TO MATHEMATICS PP. 75, 85, 86.

کا مالک تھا۔"[۵۰]

عبدالرحمٰن بن احمد بن یونس (م ۱۰۰۸ء) نے ٹرگنومیٹری میں شاندار خدمات انجام دی ہیں۔ اس نے دو زاویوں ا اور ب کی جیب التمام حاصلِ ضرب کے متعلق مندرجہ ذیل کلیہ نکالا:

جتا ا جتا ب = ½ [جتا (ا – ب) + جتا (ا + ب)]

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

ایک ڈگری کے زاویے کی جیب کے متعلق مندرجہ ذیل کلیہ استخراج کیا:

جا (۱)° ۱۸/۳۹ جا (۹/۸)° + ۲۱۶/۳۱۵ جا (۱۵/۱۶)°

$$\sin(1^\circ) = \frac{18}{39}\sin\left(\frac{9}{8}\right)^\circ + \frac{216}{315}\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ$$ [۵۱]

ابوالحسن کوشیار بن حبان بن باشہری (م ۱۰۲۹ء) نے ٹرگنومیٹری کی توسیع میں بہت کام کیا۔ ظل پر ابوالوفا بزجانی نے جو تحقیقات کی تھیں انھیں ابوالحسن نے جاری رکھا اور اس میں اپنی طرف سے مفید اضافے کیے۔ اس نے حساب پر بھی ایک کتاب لکھی تھی جو اس وقت صرف عبرانی میں دستیاب ہے[۵۲]

ابوسہل الکوہی دسویں صدی ہجری کا مشہور ریاضی دان ہے۔ اس نے تیسرے اور چوتھے درجے کی مساواتوں کو حل کرنے کے قواعد استخراج کیے اور اونچے درجے کی بعض الجبرائی مساواتوں کو جیومیٹری کی مدد سے حل کرنے کے طریقے نکالے۔ اس کے بعد اس نے ان قواعد کو بعض ایسے عبارتی سوالات کے حل کرنے میں استعمال کیا جن میں تیسرے اور چوتھے درجے کی مساواتیں لگتی تھیں[۵۳]

۵۰۔ حکیم محمد سعید، ابن الہیثم، ص ۲۹

۵۱۔ پروفیسر حمید عسکری، ک۔م۔ب، ص ۴۲۲، ۴۲۳۔

۵۲۔ ایضاً، ص ۵۲۵

۵۳۔ کاجوری، ک۔م۔ب، ص ۱۰۶

ابوریحان محمد بن احمد البیرونی (م ۱۰۴۸ء) ماہر ریاضی تھا۔ اس نے ریاضی پر ۲۴ کتابیں تصنیف کی ہیں۔ لیکن ان میں سے دو تصانیف بہت اہم اور اعلیٰ ریاضی کے مباحث پر مشتمل ہیں: (۱) کتاب التفہیم۔ (۲) قانونِ مسعودی۔ التفہیم کی ضخامت تقریباً ۴۰۰ صفحات ہے اور یہ سوال جواب کے طریقے پر لکھی گئی ہے۔ قانونِ مسعودی خالص فنی نوعیت کی ہے۔ یہ متعدد جلدوں کی ایک ضخیم کتاب ہے اور مضامین کے اعتبار سے ہیئت اور ریاضی کا ایک فنی انسائیکلوپیڈیا ہے۔ اس کی تیسری جلد علم المثلث یعنی ٹرگنومیٹری کے متعلق ہے۔ اس میں البیرونی اس مسئلے پر بحث کرتا ہے کہ اگر دائرے کے اندر ایک مساوی الاضلاع مثلث یا مربع یا مخمس یا مسدس یا مثمن یا معشر بنائی جائے تو ان کے ضلع اور دائرے کے نصف قطر کی مقدار کیسے نکالی جا سکتی ہے۔ البیرونی مجوزہ کثیر الاضلاع کا ضلع معلوم کرنے کے لیے اب = جا $\frac{\hat{ج}}{۲}$ کا کلیہ دیتا ہے جس میں اب سے مراد کثیر الاضلاع کا ضلع اور $\hat{ج}$ سے مراد زاویہ ہے۔ ضلع معلوم ہونے کے بعد نصف قطر (ن) معلوم کرنے کے لیے البیرونی یہ کلیہ دیتا ہے:

$$\sqrt{ن^{۲}\,(۲-\sqrt{۲})}$$

البیرونی نے زاویے کے چھوٹے چھوٹے فروق سے جیب کی قیمتیں اخذ کی ہیں اور اس سے متعلق نظریۂ عوامل (THEORY OF FUNCTIONS) کی وضاحت کی ہے اور کلیہ بنایا ہے۔ ریاضیات کی تاریخ میں اس کلیے کو نیوٹن اور اس کے ہم عصر مغربی ریاضی دانوں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے جو سترھویں اور اٹھارویں صدی میں گزرے ہیں۔ لیکن امر واقعہ یہ ہے کہ مسلم دور کے نامور ریاضی دان نے سات صدی پیشتر نہ صرف یہ کلیہ دریافت کیا تھا بلکہ اپنی جدولیں مرتب کرنے میں اس سے عملی کام بھی لیا تھا۔ اسی طرح ریاضی میں ہندسی سلسلے یعنی GEOMETRICA PROGRESSIONS کو جمع کرنے کا قاعدہ بھی البیرونی کی ایجاد ہے جس کے عملی اطلاق سے اس نے $۱+۱۶+(۱۶)^{۲}+(۱۶)^{۳}+\ldots(۱۶)^{۱۰}$ کی قیمت نکالی جو اس کی تحقیق کے مطابق ۱۸۴۴۴۸۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۴۱۹ نکلتی ہے۔ ریاضی میں اتنے بڑے جواب کا

سوال بہت کم لوگوں نے حل کیا ہوگا۔[۵۴] البیرونی کی ایک نمایاں خدمت یہ ہے کہ اس نے حساب میں ہندسوں کے طریقۂ شمار اور اعداد کی وضاحت یعنی اکائی، دہائی، سینکڑہ ہزار وغیرہ کا تخیل پیش کیا اور پرکار کی مدد سے زاویہ کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرنے کا طریقہ بتایا۔[۵۵]

ابو الحسن علی بن احمد ایک ماہر ریاضی دان تھا۔ حساب میں اس کا بڑا کارنامہ یہ ہے کہ اس نے جذر اور جذر المکعب نکالنے کے وہ طریقے معلوم کیے جو آج تک رائج ہیں۔ ان طریقوں سے اس نے جو سوالات حل کیے ان کے جواب اعشاریہ میں نکالے جو اس زمانے میں ایک نئی بات تھی۔ مثلاً $\sqrt{17}$ کی قیمت پہلے اس نے کسور اعشاریہ کی مدد سے دریافت کی جو ۴۱۲ء۴ ہے پھر اس کو منٹوں اور سیکنڈوں میں تحویل کر کے ۴ ڈگری ۷ منٹ اور ۲۰ سیکنڈ جواب نکالا۔ اس کا یہ بہت بڑا کارنامہ ہے کہ اس نے حساب متعین اور حساب اعشاریہ میں تطابق پیدا کیا اور ایسے جدول بنائے جن کی مدد سے ان دونوں کی باہمی تحویل آسان ہوگئی۔[۵۶]

ابو بکر محمد بن حسن الحاسب کرخی گیارھویں صدی کا ماہر ریاضی دان تھا اور ریاضی میں اتنی مہارت کی وجہ سے الحاسب کے لقب سے مشہور ہوا۔ ریاضی میں اس کی دو تصانیف مشہور ہیں جن میں "الکافی فی الحساب"، حساب پر ہے۔ اس میں گنتی اور شمار کے اصول بیان کیے گئے ہیں اور دوسری کتاب الجبر پر ہے جس کا نام "الفخری" ہے۔

الکافی فی الحساب میں اس نے اپنی تحقیق سے ۹ اور ۱۱ کے اعداد کے متعلق دو کلیے بیان کیے ہیں۔ پہلا کلیہ یہ ہے کہ اگر کسی رقم کے ہندسوں کا مجموعہ ۹ پر پورا پورا تقسیم ہو جائے تو وہ ساری رقم ۹ پر پوری پوری تقسیم ہو جائے گی۔ دوسرا کلیہ یہ ہے کہ اگر کسی رقم

---

۵۴ ابو ریحان البیرونی، قانون مسعودی، جلد ۳، باب ۱۰ - ۱۱

۵۵ البیرونی، آثار الباقیہ، ص ۱۶۸

۵۶ جارج سارٹن، ک۔ م۔ ب، ص ۷۱۹

کے پہلے تیسرے، پانچویں وغیرہ ہندسوں کا مجموعہ دوسرے، چوتھے، چھٹے وغیرہ ہندسوں کے مجموعے کے برابر ہو یا ان دونوں میں ۱۱ کا فرق ہو تو وہ رقم ۱۱ پر تقسیم ہو جائے گی۔ مثلاً ۵۹۳۱۴۲ ایک رقم ہے جس میں پہلے، تیسرے، پانچویں ہندسے کا مجموعہ یعنے (۲+۱+۹) ۱۲ کے برابر ہے اور دوسرے، چوتھے اور چھٹے ہندسے کا مجموعہ یعنی (۴+۳+۵) بھی ۱۲ کے برابر ہے چونکہ یہ دونوں مجموعے برابر ہیں، اس لیے یہ رقم ۱۱ پر تقسیم ہے۔ یا مثلاً ۹۱۷۶۴۲ ایک رقم ہے جس میں ۹ + ۷ + ۴ = ۲۰ ہے اور ۱ + ۶ + ۲ = ۹ ہے

ان دونوں مجموعوں یعنی ۲۰ اور ۹ کا فرق ۱۱ ہے۔ اس لیے یہ رقم ۱۱ پر پوری تقسیم ہو جائے گی۔ کرخی نے اپنے الجبرے کی کتاب الفخری میں دو درجی مساوات کے دونوں حل نکالنے کا مکمل کلیہ مع ثبوت کے پیش کیا تھا۔ اس سے پہلے نویں صدی میں محمد بن موسیٰ الخوارزمی نے اپنے الجبرے میں ان دو درجی مساواتوں کے حل کرنے کا طریقہ بیان کیا تھا لیکن اس نے مساواتوں کے حل کا کوئی عمومی کلیہ نہیں نکالا تھا۔ دسویں صدی میں ابوالکامل مصری نے ان دو درجی مساواتوں کے دونوں حل معلوم کرنے کا ایک کلیہ معلوم کیا ہے۔ مگر اس کلیہ کا اطلاق صرف ایسی مساواتوں پر ہوتا تھا جن میں لا کا عددی سر ایک ہو۔ محمد بن حسن کرخی نے اسے آگے بڑھایا اور مکمل دو درجی مساوات

ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کے دونوں حل پیش کیے اور اس کے اطلاق سے چہار درجی اور شش درجی مساواتوں کے حل کا طریقہ بتایا۔

الجبرے میں عام رقموں کی جمع اور تفریق کے طریقے خوارزمی اور ابوکامل پہلے بیان کر چکے تھے کرخی نے مقادیر اصم (SURDS) کی جمع اور تفریق کے طریقے معلوم کیے جو الجبرے کی ترقی میں ایک اہم قدم تھا۔ اس سلسلے میں اس نے متعدد سوال حل کر کے دکھائے ہیں۔ مثلاً:

$$\sqrt{۸} + \sqrt{۱۸} = \sqrt{۵۰} \quad \text{اور} \quad \sqrt[۳]{۵۴} - \sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{۱۶}$$

وہ پہلا شخص ہے جس نے اعلیٰ درجے کے جذر اور $x^{2n} + ۹x^{n} =$ ط کی شکل کی دو درجی مساوات کے حل پیش کیے اور اس کے حسابی اور ہندسی ثبوت دیے۔ نیز حسابی سلسلوں کے مجموعے کے متعلق اصول وضع کیے۔[۵۷]

۵۷۔ [illegible] ۵۳۲، ۵۳۳۔

ابوالفتح عمر بن ابراہیم خیام (م ۱۱۲۲ء) ریاضی کا ایک ماہرِ کامل تھا۔ اس نے ریاضی پر ایک کتاب "مکعبات" کے نام سے لکھی جس میں اس نے جذر $\sqrt[2]{\ }$ اور جذرالمکعب $\sqrt[3]{\ }$ کے علاوہ $\sqrt[4]{\ }$، $\sqrt[5]{\ }$ اور $\sqrt[6]{\ }$ نکالنے کے طریقے بھی درج کیے۔ اس کی دوسری مشہور کتاب "جبر و مقابلہ" ہے جو سات سال کی مدت میں مکمل ہوئی۔ اسلامی دَور میں یہ الجبرے پر چوتھی یا پانچویں کتاب تھی جو اس مضمون کی پہلی کتاب یعنی محمد بن موسیٰ خوارزمی کے الجبرے کے ڈھائی سَو برس بعد تالیف کی گئی۔

عمر خیام نے اپنے اس الجبرے میں مساواتِ مفرد، مساواتِ درجہ دوم اور مکعبی مساوات کی پچیس شکلیں نکالیں اور تمام کو ہندسے کے ذریعے حل کیا۔ اس نے اپنے الجبرے میں لا^{2} کی دو درجی مساواتوں کو حل کرنے کے الجبرائی اور ہندسی طریقے دینے کے بعد لا^{3}، لا^{4}، لا^{5} اور لا^{6} کی سہ درجی، چہار درجی، پنج درجی اور شش درجی مساواتوں کی بعض قسموں کو حل کیا ہے۔ لیکن الجبرے میں اس کا سب سے بڑا قابلِ قدر کارنامہ مسئلۂ دو رقمی BINOMINAL THEORAM کا انکشاف ہے۔

یہ مسئلہ (ا + ب)^{ع} کے حل کے مطابق ہے جب ع کی کوئی سی قیمت ہو۔ اگر ع کو ۲ کے برابر کر لیا جائے تو اس کے حل کی صورت یہ ہوتی ہے۔

$$(\text{ا} + \text{ب})^{2} = (\text{ا}^{2} + 2\,\text{اب} + \text{ب}^{2})$$

اگر ع کو ۳ کے برابر لیا جائے تو اس کے حل کی صورت یہ ہوتی ہے۔

$$(\text{ا} + \text{ب})^{3} = \text{ا}^{3} + 3\,\text{ا}^{2}\text{ب} + 3\,\text{اب}^{2} + \text{ب}^{3}$$

یہ صورتیں براہِ راست بھی آسانی سے نکل آتی ہیں۔ لیکن فرض کیجیے کہ ع کی قیمت کو ۸ لیتے ہیں تو اس صورت میں (ا + ب)^{8} کو براہِ راست حل کرنا مشکل ہے۔ البتہ مسئلہ دو رقمی کی مدد سے اسے بغیر کسی دقت کے حل کیا جا سکتا ہے۔

عمر خیام نے اپنے الجبرے میں دو رقمی مسئلے کے حل کا باقاعدہ کلیہ دیا ہے۔ عمر خیام نے بڑے زوردار اور مربوط طریقے سے تیسرے درجے کی مساواتوں کو جیومیٹری کی مدد سے حل کیا۔ اس کا یہ کام اس قدر ٹھوس اور منظم بنیادوں پر استوار ہے کہ آج بھی اس کے کام کو ریاضی

کی اصل قرار دیا جا سکتا ہے۔

ناصر الدین (م ۱۲۷۴ء) ایک مشہور ریاضی دان تھا۔ اس نے الجبرے، جیومیٹری اور حساب پر رسالے لکھے اور اقلیدس کے بعض حصوں کا ترجمہ کیا۔ وہ پہلا شخص تھا جس نے ٹرگنومیٹری کو فلکیات سے الگ کر کے اس تصحیح سے مرتب کیا کہ پندرھویں صدی تک اس کا کام یورپ میں قدر کی نگاہوں سے دیکھا جاتا رہا۔ اس نے متوازی خطوط کے متعلق موضوعہ کا ثبوت دیا جسے (WALLIS) نے ۱۵۴۱ء میں لاطینی ترجمے کے ساتھ شائع کیا[۵۸]۔ ناصر الدین نے مسئلہ فیثا غورث کا صحیح ثبوت بھی پیش کیا[۵۹] اور ٹرگنومیٹری پر جو کام پہلے ہو چکا تھا اس پر مکمل نظر ثانی کی[۶۰]۔

---

[۵۸] کاجوری ، ک ۔ م ۔ ب ، ص ۱۰۸

[۵۹] ہاورڈ ایوز ، ک ۔ م ۔ ب ، ص ۱۹۴

[۶۰] حسین نصر ، ک ۔ م ۔ ب ، ص ۳۶۱